Séries de Fourier

PC*2

1^{er} février 2009

Table des matières

1 Rappels sur les fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Dans la suite, lorsqu'on dit qu'une fonction numérique f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I, on sous-entend $0 \leq k \leq \infty$.

Rappel 1. Soit f une fonction, définie sur un segment $[a, b]$, à valeurs complexes et $c \in]a, b[$. Pour que f soit $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$ il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de ses restrictions à $[a, c]$ et à $[c, b]$; en outre on peut définir une dérivée généralisée de f à partir de dérivées généralisées de chacune de ces restrictions.

Rappel 2. On rappelle qu'une fonction f, définie sur un intervalle I, à valeurs complexes, est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I si sa restriction à tout segment de I l'est. Dans la suite on notera $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et :
- $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{K}$.
- $\mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{K}$.
- $\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{K}$.
- $\mathcal{M}^k_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{K}$.

Rappel 3. Soit f une fonction T périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes. Alors si J est un segment de longueur T, on a :

$$\int_J f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction périodique dont $T > 0$ est une période. Pour que f soit $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$ il faut et il suffit qu'existe un segment $[a, a+T]$ de longueur T tel que $f_{|J}$ le soit.*

Proposition 2. *Soit $T > 0$ un réel et g une application d'un segment $[a, a+T]$ de longueur T, dans $\mathbf{C}$ telle que $g(a) = g(a+T)$. Il existe une et une seule application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, T-périodique et dont la restriction au segment $[a, a+T]$ vaille g. Au surplus :*
- *Si g est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, il en est de même de f et, si $k \geq 1$, on peut choisir une dérivée généralisée de f qui soit T-périodique.*
- *Si g est continue il en est de même de f.*

On peut donc définir une fonction $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, T-périodique, par la donnée de sa restriction à un segment de longueur T. *La fonction g s'appelle la* **T-périodisée de f.**

Démonstration. Un raisonnement par analyse-synthèse prouve que la seule fonction f T-périodique qui prolonge g est donnée par :

$$f(x) = g(x - kT) \quad \text{avec} \quad k = \left[\frac{x-a}{T}\right]$$

Les lecteurs vérifieront les propriétés énoncées, par exemple à partir du rappel 1 page 2. □

Remarque 1. Si g ne satisfait pas la condition $g(a) = g(a+T)$, on peut la modifier au point $a+T$ pour qu'il en soit ainsi. La fonction T-périodisée obtenue, soit f, vérifie :

$$\boxed{\int_J f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} g(t)\,\mathrm{d}t}$$

pour tout segment J de longueur T ; ce qui valide la théorie qui suit.

Remarque 2. Dans la suite, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, T-périodique sur $\mathbf{R}$, toutes les dérivées généralisées successives de f seront implicitement supposées T-périodiques.

2 Coefficients de Fourier

2.1 Coefficients de Fourier des fonctions continues par morceaux, périodiques

Définition 1 (Coefficients des fonctions 2π-périodiques). Soit f une fonction à valeurs complexes, 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$; si $k \in \mathbf{Z}$, on pose :

$$\boxed{\widehat{f}(k) = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kt}\,\mathrm{d}t}$$

qui s'appelle **coefficient de Fourier exponentiel d'indice k de f.**

Définition 2. Sous les hypothèses précédentes, on définit aussi, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t}$$

qui s'appellent **coefficients de Fourier trigonométriques d'indice n de f.** Il vient alors, pour k et $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{array}{|rcll|} c_0(f) & = & \dfrac{a_0(f)}{2} & (1)\\ c_k(f) & = & \dfrac{1}{2}\left[a_k(f) - \mathrm{i}\,b_k(f)\right] & (2)\\ c_{-k}(f) & = & \dfrac{1}{2}\left[a_k(f) + \mathrm{i}\,b_k(f)\right] & (3)\\ a_n(f) & = & c_n(f) + c_{-n}(f) & (4)\\ b_n(f) & = & \mathrm{i}\left[c_n(f) - c_{-n}(f)\right] & (5) \end{array}$$

Définition 3 (Coefficients des fonctions T-périodiques). Soit f une fonction à valeurs complexes, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ *(resp $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$).* Posons, **dans toute la suite de ce cours** :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

La fonction g définie par :

$$x \mapsto f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

Est alors 2π-périodique, continue *(resp $\mathcal{C}^k$)* par morceaux sur $\mathbf{R}$. Les coefficients de Fourier de f sont, par définition, ceux de g. Si $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$, il vient :

$$\boxed{c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}\,kx}{T}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\omega\,x}\,\mathrm{d}x}$$

et, de manière analogue :

$$\boxed{a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x}$$

Dans la suite, on travaillera avec les fonctions 2π-périodiques, le changement de variable $\boxed{x = \omega\,t}$ permettant de s'y ramener.

Proposition 3. *Si f est une fonction continue par morceaux, 2π-périodique à valeurs complexes, les fonctions*

$$\overline{f}, \quad g : t \mapsto f(-t) \text{ et, pour } a \in \mathbf{R},\ f_a : t \mapsto f(t+a)$$

le sont également et :
- $c_k(\overline{f}) = \overline{c_{-k}(f)}$.
- *Si f est à valeurs réelles, les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.*
- *Soit $g : t \mapsto f(-t)$. Alors :*

$$c_k(g) = c_{-k}(f) \quad a_n(g) = a_n(f) \quad b_n(g) = -b_n(f)$$

- *Si f est paire* (resp impaire)*, les $b_n(f)$* resp les *$a_n(f)$ sont tous nuls.*
- *Soit $f_a : t \mapsto f(t+a)$. Alors :*

$$c_k(f_a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ka}\,c_k(f)$$

Remarque 3. Il résulte de tout cela qu'il est préférable, lorsque la fonction est paire *(resp impaire)* de travailler avec les coefficients de Fourier en cosinus *(resp en sinus)*. En revanche, lorsque la fonction est à valeurs réelles, il n'est pas *à priori* plus simple de travailler avec ces coefficients quoi qu'ils soient réels. Il conviendra de s'adapter suivant les cas.

Proposition 4. *L'application $\mathcal{F}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ définie par :*

$$f \mapsto \widehat{f}$$

est linéaire. La suite $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est bornée et :

$$||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Résultat analogue avec les fonctions continues par morceaux sauf que l'intégrale de droite ne définit plus une norme mais une semi-norme.

Proposition 5 (Coefficients de Fourier d'une dérivée). *Soit f une fonction 2π-périodique,* **continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$**, *à valeurs complexes. Soit $\mathrm{D}\,f$ une dérivée généralisée de f. Alors, si $k \in \mathbf{Z}$:*

$$\boxed{c_k(\mathrm{D}\,f) = \mathrm{i}\,k\,c_k(f)}$$

Si f **est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $\mathbf{R}$** *:*

$$\boxed{c_k(\mathrm{D}^p\,f) = (\mathrm{i}\,k)^p\,c_k(f)}$$

En particulier :

$$\boxed{c_k(f) \quad = \quad O\left(\frac{1}{|k|^p}\right) \text{ au voisinage de l'infini} \quad (6)}$$

Remarque 4. Il faut avoir constamment à l'esprit que la relation $c_k(\mathrm{D}\,f) = \mathrm{i}\,k\,c_k(f)$ provient de l'égalité :

$$\int_a^b \mathrm{D}\,u(t)\,\mathrm{d}t = u(b) - u(a)$$

Valable pour une fonction u continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux et qui est fausse lorsque u n'est plus continue (les sauts de u en ses points de discontinuité interviennent alors)

Remarque 5. Les relations de domination (6) sont importantes car elles permettent, entre autre, de justifier la dérivation terme à terme de la série de Fourier d'une fonction f (par exemple, si on cherche une solution périodique d'une équation différentielle sous forme de la somme de sa série de Fourier).

2.2 Sommes partielles d'une série de Fourier

Définition 4. – Soit f une fonction 2π périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes. Pour tout entier naturel p, la somme :

$$\boxed{S_p(f)(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx}$$

est appelée **Somme partielle de rang p de la série de Fourier de f au point x.**

– Si la suite $(S_p(f)(x))_{p\in\mathbf{N}}$ est convergente, la série de Fourier de f est dite convergente au point x et sa somme est par définition :

$$\lim_{p\to\infty} S_p(f)(x)$$

Remarque 6. Le coefficient $\boxed{c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}}$ représente **la valeur moyenne de f sur un intervalle de période**. L'égalité entre les expressions trigonométrique et exponentielle de $S_p(f)$ s'obtient en y substituant à $c_k(f)$ et $c_{-k}(f)$ leurs expressions tirées des formules 2 et 3 page 4.

Remarque 7. Pour des fonctions T-périodiques il suffit de remplacer x par $\omega\, x$ dans la formule ci-dessus.

Remarque 8. Si les deux séries $\sum_{k\geq 1} c_{-k}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}$ et $\sum_{k\geq 0} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$, convergent la série de Fourier de f converge au point x et :

$$\lim_{p\to\infty} S_p(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(f)\,\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}\,x} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\,\mathrm{e}^{k\mathrm{i}\,x}$$

mais la réciproque est fausse comme le montre l'étude en 0 de la somme partielle de la série de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = x - \pi \text{ sur }]0, 2\pi[\quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

et prolongée par 2π-périodicité. Elle est impaire et on trouve :

$$b_n(f) = -\frac{2}{n} \text{ donc } c_k(f) = \frac{\mathrm{i}}{k}$$

3 Convergence en moyenne quadratique

Proposition 6. *L'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ des fonctions continues 2π-périodiques à valeurs complexes, définies sur $\mathbf{R}$, peut être muni du produit scalaire $(\ |\ )$ défini par :*

$$\boxed{(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t}$$

alors la famille $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ où e_k est la fonction $\boxed{t \mapsto \mathrm{e}^{kit}}$ *est une* **famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$** *et :*

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}),\ \forall k \in \mathbf{Z},\ c_k(f) = (e_k|f)}$$

On notera $f \mapsto ||f||_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

Remarque 9. On a une propriété analogue avec le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques, à valeurs réelles muni du produit scalaire $<\ |\ >$ défini par :

$$\boxed{< f|g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}$$

La famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 0 \\ \cos px & \text{si } n = 2p-1 \text{ et } p \geq 1 \\ \sin px & \text{si } n = 2p \text{ et } p \geq 1 \end{cases}}$$

est orthonormale pour $<\ |\ >$.

Proposition 7. – *La projection orthogonale d'un élément $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ sur le sous espace :*

$$\mathcal{P}_p = \mathrm{Vect}\left((e_k)_{|k|\leq p}\right)$$

est la somme partielle S_p.

– *On en déduit la relation :*

$$\boxed{||f||_2^2 = ||S_p(f)||_2^2 + \mathrm{d}(f, \mathcal{P}_p)^2}$$

– *L'application qui, à un élément $P \in \mathcal{P}_p$ associe*

$$||f - P||_2$$

atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

– *On a* **l'inégalité de Bessel** *:*

$$\boxed{\sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2 \leq ||f||_2^2}$$

– *On en déduit la convergence des séries numériques associées aux suites : $(|c_k(f)|^2)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(|c_{-k}(f)|^2)_{k\in\mathbf{N}}$. En particulier :*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} c_k(f) = 0 \ \ et \ \lim_{k\to\infty} \ c_{-k}(f) = 0}$$

et la somme $\sum\limits_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2$ admet, quand $p \to \infty$, une limite satisfaisant **l'inégalité encore dénommée inégalité de Bessel** *:*

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 \leq ||f||_2^2}$$

– *Enfin,* **si f est à valeurs réelles**, *on a des propriétés analogues en remarquant d'abord que les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont réels puis que, en vertu des formules 2 et 3 page 4, on a, pour $n \in \mathbf{N}^*$:*

$$|c_0(f)|^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} \qquad (7)$$

$$|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{1}{2}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) \qquad (8)$$

d'où la série $\sum\limits_{n\geq 0} [a_n(f)^2 + b_n(f)^2]$ converge et les suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ tendent vers 0 et :

$$\boxed{\frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) \leq (f|f) \ \ (Bessel)}$$

3.1 Les théorèmes de convergence en moyenne quadratique

Théorème 1 (Weierstrass). *Toute fonction appartenant à $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est uniformément approchable par des polynômes trigonométriques complexes. (Un polynôme trigonométrique complexe est un élément d'un espace $\mathcal{P}_p$)*

La démonstration de ce résultat sera faite dans la section 6.1.

Théorème 2. *Pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, la suite $(S_p(f))$ des sommes partielles de la série de Fourier de f converge* **en moyenne quadratique** *vers f, à savoir :*

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} ||S_p(f) - f||_2 = 0}$$

Théorème 3 (Formule de Parseval). *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$:*

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} |c_k(f)|^2 = ||f||_2^2}$$

Si g est un autre élément de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, les séries :

$$\boxed{\sum_{k\geq 0} \overline{c_k(f)}\, c_k(g) \ \ et \ \sum_{k\geq 0} \overline{c_{-k}(f)}\, c_{-k}(g)}$$

sont **absolument convergentes**. *On en déduit la convergence de la suite de terme général :*

$$\sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)}\, c_k(g)$$

dont la limite vaut $(f|g)$:

$$\boxed{(f|g) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)}\, c_k(g)}$$

Remarque 10. En terme de signaux périodiques, la quantité $||f||_2^2$ représente l'énergie associée au signal périodique décrit par f. Le théorème de Parseval exprime que cette énergie est la somme des énergies des différentes harmoniques.

Remarque 11. Ce qui précède s'exprime également, pour les fonctions à valeurs réelles, à l'aide des coefficients en sinus et cosinus. En particulier :

La suite des sommes partielles de la série de Fourier de f (exprimées en sinus et cosinus) converge vers f dans l'espace préhilbertien réel des fonctions 2π-périodiques, continues, à valeurs réelles muni du produit scalaire $< \mid >$.

– Parseval s'écrit :

$$\boxed{(f|f) = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right)}$$

et, si g est une autre fonction :

$$\boxed{(f|g) = \frac{a_0(f)\,a_0(g)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)\,a_n(g) + b_n(f)\,b_n(g)\right)}$$

On traitera en exercice le cas des fonctions T-périodiques. Les formules ci-dessus sont rigoureusement les mêmes.

Proposition 8. *L'application linéaire $f \mapsto \widehat{f}$ de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ est injective.*

3.2 Extension aux fonctions continues par morceaux

On peut étendre les résultats précédents aux fonctions 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes. Posons :

$$\boxed{S(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t}$$

S possède les propriétés d'un produit scalaire, **sauf qu'elle n'est plus définie**. On posera :

$$\boxed{N(f) = \sqrt{S(f,f)}}$$

qui est une semi-norme sur l'espace $\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes.
Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

– $\boxed{c_k(f) = S(e_k, f)}$.
–
$$\boxed{S_p(f) = \sum_{|k|\le p} S(e_k,f)\,e_k}$$
– $f - S_p(f)$ est encore "S-orthogonale" à tous les e_k pour $|k| \le p$. donc à $\mathcal{P}_p$.
– La relation de Pythagore est encore valable puisque sa démonstration ne fait pas intervenir le caractère défini du produit scalaire. Donc :

$$\boxed{N(f)^2 = N(f - S_p(f))^2 + ||S_p(f)||_2^2}$$

– Enfin, pour tout autre élément $\phi \in \mathcal{P}_p$:

$$\boxed{N(f - S_p(f)) \le N(f - \phi)}$$

Puisque la démonstration repose encore sur le théorème de Pythagore. La seule nouveauté consiste à approcher f en moyenne quadratique par un polynôme trigonométrique. Ce qui découle de la proposition suivante :

Proposition 9. -

– *Soit f une fonction 2π-périodiques continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes. Soit $\epsilon > 0$, Il existe un élément $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ tel que :*
$$N(f-g) < \epsilon$$
– *On en déduit l'existence d'un polynôme trigonométrique ϕ tel que :*
$$N(f-\phi) < \epsilon$$

Tout le reste demeure sans changement.

Remarque 12. Si f est une fonction continue par morceaux de $]-\pi,\pi[$ dans $\mathbf{C}$, telle que la fonction $|f|^2 = f\overline{f}$ soit intégrable, on peut la prolonger par 2π-périodicité en une fonction, toujours notée f, dont les restrictions aux intervalles $](2k-1)\pi,(2k+1)\pi[$ $(k \in \mathbf{Z})$ soient de carré intégrable. La théorie précédente est encore valable pour une telle fonction car il existe une fonction g, continue par morceaux, 2π-périodique, vérifiant :

$$N(f-g)<\epsilon$$

Exemple 1. Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ à l'aide de la fonction f 2π-périodique, définie sur $[0,2\pi[$ par :

$$f(x)=x-\pi$$

Exercice 1. Inégalité isopérimétrique.

Exercice 2. Donner un exemple très simple de fonction 2π périodique, intégrable sur $]0,2\pi[$ tel que Parseval soit en défaut. Comparer avec ce que dit votre ouvrage de physique favori. *[Voir l'exercice 27 pour des compléments sur les séries de Fourier de fonctions intégrables sur* $]0,2\pi[$*].*

Exercice 3 (Inégalité de Poincaré). Si $f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ est telle que $f(0)=f(1)=0$ alors :

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Prouver que la constante ne peut pas être améliorée.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction continue admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes est constante.

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On pose :

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Exprimer $f*g(x)$ comme somme d'une série trigonométrique à l'aide des coefficients de Fourier de f et de g. Montrer que $f*g$ est continue. Soit $g\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, non nulle. Etudier les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ défini par :

$$f\mapsto f*g$$

4 Convergence ponctuelle

4.1 Convergence normale

Théorème 4 (Théorème de convergence normale). *Soit f une fonction 2π-périodique,* **continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$** *:*

- *Les sommes* $\boxed{\sum_{k=-p}^{p}[k\,|c_k(f)|]^2}$ *sont majorées. On en déduit la convergence des séries :*

$$\boxed{\sum_{k\geq 0}|c_k(f)|\quad \textit{et}\quad \sum_{k\geq 0}|c_{-k}(f)|}$$

- *Les deux séries de fonctions :*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\quad \textit{et}\quad \sum_{k=0}^{\infty}c_{-k}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}}$$

convergent normalement sur $\mathbf{R}$.

- *Pour tout réel x :* $\boxed{\lim_{p\to+\infty}S_p(f)(x)=f(x)}$

4.1.1 Exemples et exercices d'application directe

Exemple 2. Soit $\lambda\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}$. En considérant la 2π-périodisée de la fonction définie sur $[-\pi,\pi]$ par :

$$x\mapsto\cos\lambda x$$

Prouver les relations suivantes (Développements Eulériens)

$$\pi\cot\!\mathrm{g}\,\lambda\pi=\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2-n^2}$$

$$\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}=\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\lambda}{\lambda^2-n^2}$$

En déduire les trois résultats suivants :

– Pour $\lambda \in \mathbf{R}$:
$$\sin \lambda\pi = \lambda\pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right)$$
– En déduire, pour $\lambda \in]0, 1[$, *la formule des compléments pour la fonction* Γ :
$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}$$
– Pour $\lambda \in]0, 1[$:
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda-1}\,\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}$$

Exercice 6. Ecrire comme somme de séries trigonométriques, les fonctions 2π périodiques définies sur $[-\pi, \pi]$ par :
$$|x|, \qquad \mathrm{e}^{-|x|}, \qquad |\sin x|^3$$
A l'aide du dernier développement, prouver la relation :
$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4608}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}$$

Exercice 7. Etudier les coefficients de Fourier de :
$$x \mapsto \frac{1}{2 + \sin^2 x}$$
Trouver une constante réelle $\lambda \in]0, 1[$ telle que le coefficient d'indice n soit dominé par λ^n quand $n \to \infty$.

Exercice 8. Montrer que, sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à préciser :
$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}$$

Exercice 9. Développer en série de Fourier la fonction :
$$\frac{\sin x}{5 - 3\cos x}$$

Exercice 10. Démontrer l'existence d'une unique suite de polynômes (B_n) à coefficients réels telle que $B_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$:
$$B_n' = B_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
Démontrer que la fonction 1-périodique $\tilde{B_n}$ qui coïncide avec B_n sur $[0, 1[$ est de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ pour $n \geq 2$ et de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ par morceaux pour $n \geq 1$. Représenter comme somme de séries de Fourier les fonctions $\tilde{B_n}$. En déduire que, si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$:
$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$
s'écrit sous la forme $\pi^{2k} r_k$ où $r_k \in \mathbf{Q}$. Calculer $\zeta(4)$.

4.1.2 Exemples et exercices d'application à des constructions de fonctions satisfaisant des propriétés (différentielles, fonctionnelles *etc.*) imposées

Exercice 11 (Équations différentielles linéaires à second membre continu par morceaux). -

1. À quelle condition sur $u \in \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ la fonction v définie sur $\mathbf{R}$ par :
$$x \mapsto \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t,$$
est-elle 2π-périodique ? Préciser la régularité de v. Prouver qu'on peut choisir $Dv = u$.
2. Soit $f \in \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et $\omega \in \mathbf{C} - \mathrm{i}\mathbf{Z}$. On cherche les fonctions $y \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$ telles que, pour tout réel x :
$$(E) \qquad Dy(x) - \omega\, y(x) = f(x)$$
3. Montrer, en calculant ses coefficients de Fourier, qu'une solution de (E) est unique.
4. Prouver son existence en commençant par le cas où f est continue et y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. *[On introduira la somme ϕ de la série trigonométrique censée la représenter et on utilisera judicieusement la première question]*

Exercice 12 (Système asservi par un signal en créneau). Soit ϕ une fonction 2π-périodique, impaire telle que :

$$\phi(x) = 1 \text{ pour } 0 < x < \pi$$

Soit ω un réel, on appelle solution généralisée de l'équation différentielle

$$y" + \omega^2 y = \phi \tag{9}$$

Toute fonction y de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique admettant une dérivée seconde sur chaque intervalle $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ vérifiant sur I_k :

$$y"(x) + \omega^2 y(x) = \phi(x)$$

Prouver qu'une telle fonction est $\mathcal{C}^2$ par morceaux et les trouver toutes [*on pourra se limiter au cas où $\omega \notin \mathbf{Z}$ et on utilisera une méthode analogue à celle de l'exercice 11 en commençant par le cas où ϕ est continue et y est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$*].

Exercice 13. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et h définie par :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{n^2}$$

Si f est continue par morceaux et 2π périodique, existe-t-il ψ, continue par morceaux et 2π-périodique telle que :

$$\lambda\psi = \psi * f + h$$

(Le produit de convolution $*$ a été défini dans l'exercice 5)

Exercice 14. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodiques telles que, pour tout x réel :

$$2f(x+1) = f(x) + f(2x)$$

Que dire si l'on suppose seulement f continue ?

4.1.3 Quelques exercices plus délicats

Exercice 15 (Transformation de Fourier élémentaire). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ nulle à l'extérieur d'un segment $[-a, a]$. On définit :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $T > 2a$. Qu'obtient-t'on en développant en série de Fourier la fonction f_T T-périodique, égale à f sur $[-T/2, T/2]$ et en faisant tendre T vers $+\infty$ dans la formule obtenue ?

Exercice 16. Soit $t > 0$ un réel :

– Montrer qu'on peut définir :

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} \mathrm{e}^{-\frac{(k-x)^2}{2t}}$$

– Montrer que f peut s'écrire comme somme d'une série de Fourier.
– On pose :

$$\theta(t) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} \mathrm{e}^{-\pi\frac{k^2}{t}}$$

Trouver une relation entre $\theta(t)$ et $\theta\left(\frac{1}{t}\right)$

Exercice 17 (Noyau de Poisson). Pour $\phi \in \mathbf{R}$ et $0 \leq r < 1$, on pose :

$$P_r(\phi) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi + r^2}$$

La fonction P_r s'appelle Noyau de Poisson.

1. Calculer les coefficients de Fourier vers P_r, étudier la convergence de la série de Fourier de P_r.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, calculer à l'aide des coefficients de Fourier de f :

$$P_r * f(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\phi-\theta)\,f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Montrer que, quand $r \to 1$:

$$\lim_{r\to 1} ||P_r * f - f||_\infty = 0$$

où $||u||_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |u(x)|$ [*on commencera par le prouver pour un polynôme trigonométrique*].

3. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) \in \mathbf{R}_+$. Montrer que la suite de terme général $\sum\limits_{n=-p}^{n=p} c_n(f)$ converge ; qu'en déduire sur f ?

Exercice 18 (X). Soit f, continue par morceaux, 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On note (a_n) et (b_n) les suites des coefficients de Fourier de f en cosinus et sinus. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0}(|a_n| + |b_n|)$ converge et que la suite (R_n) avec $R_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est décroissante. Pourquoi peut-on supposer f continue ? Montrer qu'existe $M > 0$, tel que pour tout $h > 0$:

$$\frac{1}{h}\int_0^{2\pi} (f(x+h) - f(x-h))^2 \,\mathrm{d}x \leq M$$

Exercice 19 (X 2004 : coefficients de Fourier des fonctions analytiques réelles). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, 2π-périodique.

1. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

   i) Il existe $r > 0$ tel que :

   $$\sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{r^n \,||f^{(n)}||_\infty}{n!} < +\infty$$

   ii) Il existe $r > 0$ tel que :

   $$\sup_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)\,\mathrm{e}^{|k|r}\,| < +\infty$$

2. Prouver que la propriété **i)** équivaut à la suivante : pour tout réel a, f est développable en série entière au voisinage de a.

4.2 Théorème de Dirichlet

Proposition 10. *Le produit de convolution de deux fonctions 2π périodiques, continues par morceaux est défini dans l'exercice 5. Si f est une telle fonction et $p \in \mathbf{N}$, alors pour tout réel x, on a la relation :*

–

$$\boxed{S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_p(t)\, f(x-t)\,\mathrm{d}t = (D_p * f)(x)}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\boxed{S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_p(t)\,[f(x-t) + f(x+t)]\,\mathrm{d}t}$$

Où D_p est le noyau de Dirichlet *défini par :*

$$\boxed{D_p(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\dfrac{2p+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & si\ t \notin 2\pi\mathbf{Z} \\ 2p+1 & sinon \end{cases}}$$

Qui appartient à $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

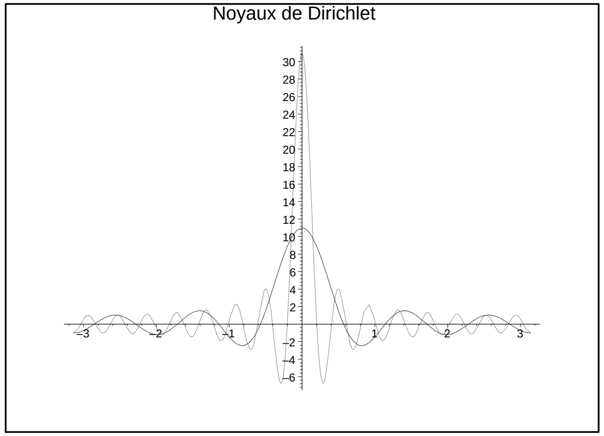
– *En particulier, en appliquant la relation précédente à la fonction e_0 : $x \mapsto 1$, Il vient :*

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_p(t)\,\mathrm{d}t = 1}$$

Théorème 5 (de Dirichlet). *Soit f une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors, pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à :*

$$\boxed{\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}[f(x+h) + f(x-h)] = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]}$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(x)$.



Exercice 20. Calculer la somme de la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique, définie sur $[-\pi,\pi]$ par :

$$f(x)=\frac{x}{2}$$

Quelle formule retrouve-t-on ?

Exemple 3. Phénomène de Gibbs *cf TD Maple*

Exercice 21. Calculer la somme de la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique, définie sur $[0,2\pi[$ par :

$$f(x)=x-\pi$$

Exercice 22. Montrer l'existence d'une fonction f, 2π périodique, impaire, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que :

$$\forall t\in]0,\pi[,\ f(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}$$

En considérant $a_n(f)$, trouver la valeur de l'intégrale semi-convergente :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 23 (Exemples où les hypothèses ne sont pas vérifiées). Soit f l'application paire, 2π-périodique telle que $f(x)=\sqrt{x}$ sur $[0,\pi]$.

- Montrer que $a_n(f)=O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha>0$ à préciser.
- Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Montrer que la fonction f 2π-périodique, paire, définie sur $[0,\pi[$ par :

$$f(x)=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

Est somme, sur un domaine à préciser, d'une série trigonométrique.

Exercice 24 (Intégrales de Fresnel). -

1. Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t^2}\ \mathrm{d}t$$

dont la valeur sera désignée par I.

2. Calculer I en considérant la 2π-périodisée de la fonction f définie sur $[0,2\pi[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x^2}{4\pi}}$$

En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

5 Séries trigonométriques

Exercice 25. Calculer, pour $|x|<1$ les sommes des séries entières :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}x^n\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$$

En déduire les sommes des séries trigonométriques :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

Quels sont les coefficients de Fourier des fonctions obtenues.

Exercice 26 (Difficile). Soit (a_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0.

– Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \cos nx$ converge simplement sur $U = \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$ vers une fonction f continue sur U.
– On suppose que f admet un prolongement par continuité en 0. Montrer que les a_n sont les coefficients de Fourier de f *[Indication : considérer* $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \cos nx$ *et* $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} \cos nx$ *où les* α_n *sont les coefficients de Fourier de* f*]*
– Démontrer alors que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge.

Exercice 27. Montrer que les sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

sont bornées indépendamment de (n, x) sur $\mathbf{R}$. En déduire que, si f est une fonction continue, intégrable sur $]0, 2\pi[$, prolongée par 2π-périodicité à $\mathbf{R}$, on peut définir des coefficients de Fourier $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t$ et que la suite de terme général

$$\sum_{\substack{-n\leq k\leq n \\ k\neq 1}} \frac{c_k(f)}{k}$$

converge.

Exercice 28. On considère la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

Prouver que sa somme f est une fonction intégrable sur $]0, 2\pi[$ mais pas de carré intégrable. Calculer les coefficients de Fourier de f, conclusion ?

Exercice 29 (Séries entières et séries trigonométrique). -

1. Calculer, pour $n \in \mathbf{Z}$ et $|z| > 1$, l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\,t}}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont on note f la somme.
3. Pour $0 < r < R$, donner une majoration de a_n en fonction de r et de

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

4. En déduire que, si $R = +\infty$ et si f est bornée sur $\mathbf{C}$, elle est constante.
5. On suppose maintenant que f est bornée sur $D(0, R)$, démontrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ converge.
6. Prouver, pour $0 \leq \rho < r < R$ une formule de représentation du type :

$$f(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\phi - \theta)\, f\left(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

Où P_r est le noyau de Poisson défini dans l'exercice 17. En déduire que la borne supérieure de la fonction f dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r est atteinte sur le cercle $C(0, r)$.

6 Compléments : Convolution et régularisation

6.1 Moyennes de Féjer

Théorème 6. *Soit* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. *Posons, pour* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}$$

(moyenne de Féjer de rang n) Alors, on a les propriétés suivantes :
– $\sigma_n(f)$ *est un polynôme trigonométrique, plus précisément :*

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k(f) e_k$$

– *Pour tout réel x, on a la relation :*

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = (F_n * f)(x)$$

Où F_n est le noyau de Féjer *défini par :*

$$F_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)} & si\ t \notin 2\pi\mathbf{Z} \\ n+1 & sinon \end{cases}$$

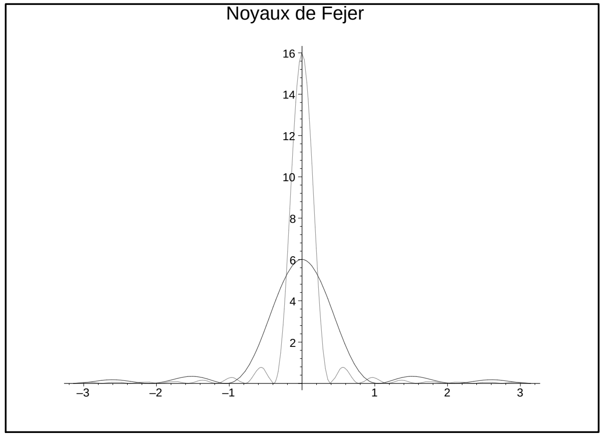
Qui appartient à $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

– *En particulier, en appliquant la relation précédente à la fonction e_0 : $x \mapsto 1$, Il vient :*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

– *La suite $(\sigma_n(f))$ des moyennes de Féjer est une suite de polynômes trigonométriques telle que :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} ||\sigma_n(f) - f||_\infty = 0}$$



Exercice 30. Déduire, de ce qui précède, la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

6.2 Produit de convolution de deux fonctions continues

Définition 5. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ avec f intégrable sur $\mathbf{R}$ et g bornée sur $\mathbf{R}$. Alors, pour tout x réel, la fonction :

$$t \mapsto f(t)\,g(x-t)$$

est intégrable sur $\mathbf{R}$. On note alors :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

avec les propriétés suivantes :

– $f * g = g * f$.
– $f * g$ est bornée et $N_\infty(f * g) \leq N_\infty(g)N_1(f)$.
– $f * g$ est continue sur $\mathbf{R}$.
– Si g est également intégrable, $f * g$ aussi et :

$$N_1(f * g) \leq N_1(f)\,N_1(g)$$

Proposition 11 (Suite régularisante). *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ une application $\mathcal{C}^1$ et bornée ainsi que sa dérivée sur $\mathbf{R}$. Soit (ρ_n) une suite d'applications continues et intégrables sur $\mathbf{R}$, à valeurs positives. On suppose :*

– *Pour tout entier n :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

– *Pour tout réel $\alpha > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

("Concentration de la masse à l'origine")

Alors $\rho_n * f$ est bornée sur $\mathbf{R}$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |\rho_n * f(x) - f(x)| = 0}$$

Remarque 13. L'intérêt de ce résultat, qui généralise la démarche suivie dans les preuves des théorèmes de Dirichlet et Féjer, est que, le plus souvent, la fonction $\rho_n * f$ "a la même régularité que ρ_n". On peut ainsi approcher f uniformément par des fonctions plus régulières. Voici des applications :

6.2.1 Approximation par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, par des polynômes

Théorème 7 (Weierstrass). *Toute fonction continue sur un segment est uniformément approchable par des polynômes.*

6.2.2 Application à la transformation de Laplace

7 Travaux dirigés

1. (Cen 99) Calculer, pour $|\alpha| \neq 1$:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\,t}}{\alpha - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}\,\mathrm{d}t.$$
2. (Mines 04) Soit :
$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n^2-1)^2}.$$
   (a) Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que $f(x) + f''(x) = |\sin x|$.
   (c) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
3. (Mines 02, Cen 07 et 08) Soit f la fonction paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que $a_n(f) = O\left(n^{-3/2}\right)$ et que la série de Fourier trigonométrique de f converge normalement vers f sur $\mathbf{R}$.

4. (TPE 99 et Cen 2001) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, 2π périodique telle que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   (a) Montrer que :
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$
   (b) Montrer que :
$$||f||_\infty^2 \leq \frac{\pi}{6}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$
   (c) Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ telle que $g(0) = g(1) = 0$. Montrer que :
$$||g||_\infty^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 g'(t)^2\,\mathrm{d}t$$
5. (Cen 98, 2000, 2007) Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.
   (a) Prouver la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n(f)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n(f)}{n}$. Exprimer la somme de cette dernière série en fonction de
$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t) f(t)\,\mathrm{d}t$$
   (b) On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :
$$F(x) = C + \frac{a_0(f)\,x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\sin nx - b_n(f)\cos nx}{n}$$
6. Soit $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi[$, prolongée par 2π-périodicité. Montrer l'existence d'une solution y, de l'équation différentielle :
$$(E) \qquad y'' + y = f(t) \;\text{ et }\; y(0) = y'(0) = 0$$
   Montrer qu'elle est bornée, en déduire que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbf{R}$.

7. (Cen 98) En se servant du développement en série de Fourier de la fonction qui vaut $\cos ax$ sur $[-\pi,\pi]$, déterminer :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right]$$

8. (Cen 98) Existe-t-il une suite réelle (a_n) *resp* (b_n) telle que :

$$\forall x\in]0,\pi[,\ x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\quad resp\quad \sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin nx$$

9. (Ens 97 et 98)
   (a) Développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique qui vaut x sur $[-\pi,\pi[$.
   (b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-2}$.
   (c) Soit $f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R})$ telle que $f(a)=f(b)$. On note m la valeur moyenne de f sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\forall x\in[a,b],\ |f(x)-m|^2\leq\frac{b-a}{12}\int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

   (d) Trouver tous les cas d'égalité.
10. (X 98) Montrer que l'on peut écrire pour tout couple (x,t) de réels :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos x}=J_0(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n J_n(t)\cos nx$$

Etudier le comportement de $J_n(t)$ quand $t\to+\infty$.

11. (X 98) On pose :

$$u_n=\int_0^{1/2}\frac{\sin(\pi nx)}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$$

Donner un équivalent de u_n. *(NDLR : Supprimer la singularité en* 0 *et utiliser Riemann-Lebesgue).*

12. (Mines 98) Développement en série de Fourier de

$$t\mapsto\frac{1}{1+\cos^2 t}$$

13. (X98 et 2004) Soit f continue par morceaux, 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Déterminer un polynôme trigonométrique P_n tel que, pour tout x :

$$\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\frac{c_k(f)}{k}\,\mathrm{e}^{k\mathrm{i}x}=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\frac{c_k(f)}{k}$$

14. (Mines 98, 99, 2001) On considère les fonctions :

$$f_1=\max(\sin,0)\quad f_2=\sin\quad f_3=|\sin|$$

$$f_4=\cos\quad f_5=|\cos|\quad f_6=\max(\cos,0)$$

En calculant un développement en série de Fourier déduire tous les autres.

15. (Mines 98) Calculer, pour $n\in\mathbf{Z}$:

$$I_n=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos t}\cos(\sin t-nt)\ \mathrm{d}t$$

16. (X 98) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, 2π-périodique. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi}f(t)^2\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leq\int_0^{2\pi}f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

17. (X 98) Soit $f\in\mathcal{C}^3(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 2π-périodique. Montrer que la fonction $f'+f^{(3)}$ s'annule en au moins quatre points distincts sur une période.
18. (Mines 99) Soit $K:[0,1]^2\to\mathbf{R}$ définie par :

$$K(x,y)=\begin{cases}x(1-y) & \text{si } x\leq y\\ y(1-x) & \text{sinon}\end{cases}$$

(a) Montrer que, pour x, y dans le segment $[0,1]$:

$$K(x,y) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n x)\sin(\pi n y)}{n^2}$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ et g définie sur $[0,1]$ par :

$$g(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

Montrer que $g \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbf{R})$, $g" = -f$, $g(0) = g(1) = 0$.

(c) Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose :

$$\gamma_n = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x$$

Prouver que :

$$\int_0^1 g(x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n^2}{n^4}$$

19. (X 99) Soit $u : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$u"(x) + (\lambda - 2\cos x)u(x) = 0$$

(a) Relation de récurrence entre les coefficients de Fourier complexes de u.

(b) Montrer que l'espace vectoriel des suites bornées qui vérifient cette relation est de dimension ≤ 1. On pourra introduire :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{vmatrix}$$

(c) Montrer que $(c_k(u))_{k\in Z}$ est soit paire soit impaire.

20. (Ens 2001) Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence infini dont on note f la somme. Montrer que, si f est bornée sur $\mathbf{C}$, alors f est constante.

21. (Ens 99) Soit H_n l'ensemble des polynômes trigonométriques complexes 2π-périodiques de degré au plus égal à n. Pour $k \in \mathbf{Z}$ on note $\widehat{P}(k)$ le coefficient de Fourier d'indice k de P. On pose :

$$F_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\mathrm{e}^{ki\theta}$$

et

$$G_n(\theta) = \sin(n\theta)F_n(\theta)$$

enfin :

$$I_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\theta-\phi)G_n(\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

(a) Soit $P \in H_n$, relation entre les coefficients de Fourier de P, I_n, F_n ?

(b) Montrer que $\widehat{G_n}(k) = -(\mathrm{i}k)/2n$ pour $-n \leq k \leq n$.

(c) Montrer que $I_n(\theta) = -\mathrm{i}\,P'(\theta)/2n$.

(d) Prouver l'inégalité :

$$||P'||_\infty \leq 2n||P||_\infty$$

22. (X 2001) Soit $\alpha \in]0,\pi[$ et f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha \end{cases}$$

(a) Étudier la série de Fourier de f et sa convergence.

(b) Que vaut la somme de cette série en $x = 0$ et $x = \alpha$? Commenter.

(c) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\,\alpha)}{n^2}$.

(d) Justifier l'existence et calculer :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

23. (Mines 2002) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, 2π-périodique telle qu'existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|^\alpha$$

(a) Soit $a \in \mathbf{R}$, rappeler l'expression des coefficients de Fourier complexes de $t \mapsto f(t+a)$.

(b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$:

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{2}\left|\frac{\pi}{n}\right|^\alpha$$

(c) Montrer que, si $\alpha > 1$, f est constante.

(d) Montrer que, si $\alpha > 1/2$, f est somme de sa série de Fourier. *[difficile ; considérer* $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+a) - f(t-a)|^2 \,\mathrm{d}t$*].*