Séries entières

PC*2

30 novembre 2009

Introduction

Ce nouvel épisode de la saga des séries se décompose en plusieurs chapitres d'importances diverses suivant les ambitions des lecteurs.

- Le chapitre 1 aborde de nouvelles questions sur les séries numériques (produit de Cauchy, groupement de termes) qui sont trop délicates pour être abordées en début d'année.
- Le chapitre 2 couvre l'intégralité du programme sur les séries entières. Le lecteur "normal" pourra largement s'en contenter.
- Dans le chapitre 3 j'approfondis certaines méthodes de développement de fonctions en séries entières en flirtant souvent avec les limites du programme (prolongement analytique, développement de produits infinis) voire en le dépassant franchement (fonctions absolument monotones). À conseiller aux étudiants ambitieux et déjà à l'aise avec le chapitre précédent.
- Le chapitre 4, qui décrit des méthodes de calculs de sommes de séries, est en revanche destiné à tous les publics.
- Enfin dans le chapitre 5 on aborde modestement des techniques de comportement de la somme d'une série entière au bord du disque de convergence avec des applications à la détermination de rayons de convergence dans des cas délicats. Si l'étude de l'exemple 34 page 55 est conseillée à

tous la suite est, comme on dit, "à recommander aux lecteurs avertis".

Table des matières

Chapitre 1

Compléments sur les séries

1.1 Produit de Cauchy de deux séries à termes complexes

Définition 1 (Produit de Cauchy). Le *produit de Cauchy* des deux séries de termes généraux respectifs a_n et b_n est la série de terme général c_n avec :

$$\boxed{c_n = \sum_{p+q=n} a_p \, b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}}$$

Théorème 1. *Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont* **absolument convergentes***, il en est de même de $\sum c_n$ et :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)}$$

Exemple 1 (Importance des hypothèses). Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ si $n \geq 1$. Le produit de Cauchy de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ par elle même diverge.

1.2 Groupement de termes

On se limite à des exemples.

Proposition 1. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *une série convergente à termes complexes de somme* A. *Si* ϕ *est une application strictement croissante de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{N}$ *telle que* $\phi(0) = 0$ *alors la série* $\sum_{k\geq 0} b_k$ *avec :*

$$\boxed{b_k = \sum_{n=\phi(k)}^{\phi(k+1)-1} a_n}$$

converge et a pour somme A

Démonstration. Soit $K \in \mathbf{N}$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{K} b_k = \sum_{n=0}^{\phi(K)-1} a_n$$

Comme $\phi(K) \geq K$, cette somme partielle converge vers A quand $K \to \infty$. □

Remarque 1. La réciproque est fausse comme le montre $a_n = (-1)^n$ et $\phi(k) = 2k$.

Exemple 2. Étude de la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

Exercice 1. Convergence et somme de la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\left[\sqrt{n+1}\right] - [\sqrt{n}]}{n} \text{ ?}$$

Chapitre 2

Séries entières

Dans la suite, on notera, pour $R \geq 0$:

$$D(0, R) = \{z \in \mathbf{C} \ / \ |z| < R\}$$
$$\overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbf{C} \ / \ |z| \leq R\}$$

Définition 2 (Série entière). On appelle *série entière* associée à la suite (a_n) de nombres complexes, la série de fonctions de la variable complexe z :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n \, z^n}$$

On définit de même les séries entières d'une variable réelle.

Exemple 3 (Exemples fondamentaux). Deux exemples **à connaître absolument**, déjà rencontrés dans le cours sur les séries numériques.

a) Série géométrique : la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} z^n$ converge pour $\boxed{|z| < 1}$ et :

$$\boxed{\forall z \in D(0, 1), \ \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}}$$

b) Série exponentielle : la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $\boxed{z \in \mathbf{C}}$ et

$$\boxed{\forall z \in \mathbf{C}, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z}$$

On en déduit immédiatement :

c) Séries trigonométriques : les séries entières suivantes convergent pour tout $\boxed{x \in \mathbf{R}}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x}$$

et

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x}$$

d) Séries trigonométriques hyperboliques : les séries entières suivantes convergent pour tout $\boxed{x \in \mathbf{R}}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x}$$

et

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x}$$

2.1 Rayon de convergence d'une série entière

Lemme 1 (Lemme d'Abel). *Soit $r > 0$ un réel tel que la suite $(|a_n|\, r^n)$ soit bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < r$, la suite $(|a_n||z|^n)$ est dominée par la suite de terme général $\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$.*

Démonstration. Si, pour tout n, $|a_n|\, r^n \leq M$, alors, si $|z| < r$:

$$|a_n||z|^n = |a_n|\, r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

□

Corollaire 1. *Avec les conventions et notations du lemme d'Abel, la série $\sum_{n \geq 0} a_n\, z^n$ converge absolument pour $|z| < r$.*

Démonstration. Car $\dfrac{|z|}{r} < 1$. □

Définition 3. On définit le rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$ d'une série entière $\sum a_n\, z^n$ de la manière suivante :
soit X l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(|a_n|\, r^n)$ soit bornée. $0 \in X$ qui est donc non vide.

- Si X est majoré, il admet une borne supérieure dans $\mathbf{R}$ et on pose :

$$\boxed{R = \sup X}$$

- Sinon on pose :

$$\boxed{R = +\infty}$$

Exemple 4. Reprenons les exemples fondamentaux vus en 3 page 9. Pour la série géométrique $\sum\limits_{n \geq 0} z^n$, il vient :

$$X = \{r \geq 0 \;/\; (r^n) \;\text{ est bornée}\} = [0, 1]$$

donc $R = 1$.
Pour la série exponentielle et les séries trigonométriques on a $X = [0, +\infty[$ donc $R = +\infty$.

Le rayon de convergence satisfait une propriété, plus forte.

Théorème 2. *Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- *Si $|z| < R$ alors* **la série converge absolument**. *Le disque* **ouvert** *$D(0, R)$ [qu'on convient être égal à $\mathbf{C}$ si $R = +\infty$] est appelé* **disque ouvert de convergence** *ou simplement* **disque de convergence**.
- *Si $|z| > R$ alors la suite $(|a_n||z|^n)$* **n'est pas bornée** *et donc la série diverge grossièrement.*

En revanche, on ne peut rien dire si $|z| = R$.

Démonstration. Que R soit fini ou non, on a les propriétés suivantes :

- si $|z| < R$, $|z|$ n'est pas un majorant de X donc il existe $r \in X$ tel que $|z| < r$. Mais alors le lemme d'Abel assure l'absolue convergence de la série $\sum a_n\, z^n$.
- si $|z| > R$, $|z| \notin X$ et donc la suite $(|a_n||z|^n)$ n'est pas bornée.

□

2.1.1 Comment déterminer un rayon de convergence

En pratique, on se fixe un réel $r \geq 0$ et on détermine R par minoration, majoration.

- Si la suite $(|a_n|\, r^n)$ est bornée, $r \in X$ donc $R \geq r$.
- Si la suite $(|a_n|\, r^n)$ n'est pas bornée, on ne peut avoir $r < R$ car cela entrainerait la convergence de la série $\sum |a_n|\, r^n$. Donc $R \leq r$.

Remarque 2. Pour comparer deux rayons de convergence R et R' on utilise des résultats évidents comme le suivant valable pour a et b appartenant à $[0, +\infty]$:

$$\forall r > 0,\ (r < a \Rightarrow r \leq b) \Longrightarrow a \leq b$$

Remarque 3. Deux propriétés utiles en pratique : soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On suppose que la suite (b_n) est à valeurs **réelles positives**. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières de termes généraux $a_n\, z^n$ et $b_n\, z^n$.

Si $\boxed{|a_n| = O\,(b_n)}$ quand $n \to \infty$ alors $\boxed{R \geq R'}$.

- Si $\boxed{|a_n| \sim b_n \geq 0}$ quand $n \to \infty$ alors $\boxed{R = R'}$.

Proposition 2 (Règle de D'alembert). *Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si le rapport $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ admet une limite $l \in [0, +\infty]$ alors :*

- *si $l = +\infty$ alors $R = 0$*
- *si $l = 0$ alors $R = +\infty$*
- *si $0 < l < +\infty$, alors $R = \dfrac{1}{l}$*

La règle de D'alembert est **hors programme**. *On demande de ne pas l'utiliser comme un résultat tout fait mais de savoir encadrer R comme il est expliqué ci-dessus.*

Exemple 5. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geq 1} n^\alpha z^n$.

Exemple 6. Rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geq 0} P(n) z^n$ où P est un polynôme non nul à coefficients complexes.

Exemple 7. Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n!)^\alpha}$.

Exemple 8. Montrer que la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0 (supposer qu'elle tend vers 0 et prouver l'existence d'une suite (k_n) d'entiers relatifs telle que, pour tout n on ait $|n - k_n\pi| \leq \pi/2$. Prouver alors que la suite $(k_{n+1} - k_n)$ est stationnaire et relever une contradiction).
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \sin n z^n$.

Exemple 9. Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(n!)^{1/n}}$.

Exemple 10. Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{n+\sin n}{2+\cos n} z^n$.

Exemple 11. Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} p_n z^n$ où p_n est le nombre d'entiers premiers $\leq n$.

Exemple 12. Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ avec :

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 13. Domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n^2}}{(n!)^{n^\alpha}}$.

Exemple 14. Domaine de convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} z^{[\log_2(n)]}$.

Exemple 15 (Exemples théoriques). Soient $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. En étudiant d'abord le cas où les suites complexes (a_n) et (b_n) sont géométriques, donner une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n$. Montrer par un contre exemple que l'inégalité trouvée peut être stricte.
Même question et même méthode avec la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^{n^2}$.

2.1.2 Régularité de la somme

Proposition 3. *La série est* **absolument convergente sur le disque ouvert** *de convergence et* **normalement convergente sur tout disque fermé** $D_F(0, r)$ **avec** $0 < r < R$*. La somme est continue sur le disque ouvert de convergence.*

2.2 Opérations élémentaires sur les séries entières

Proposition 4 (Somme). *Soient R et R' les rayons de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$, on note $A(z)$ et $B(z)$ les sommes de ces séries définies respectivement dans $D(0, R)$ et $D(0, R')$. alors $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon R" tel que $R" \geq \min(R, R')$.*
Si $R \neq R'$ on a l'égalité.
Si $R = R'$, on ne peut rien dire (ex $a_n + b_n = 0$).

Proposition 5 (Produit de Cauchy). *Soient R et R' les rayons de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$, de sommes $A(z)$ et $B(z)$. Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ avec, pour tout entier naturel n :*

$$\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}$$

Si R" est le rayon de convergence de cette série entière, il vient $R" \geq \min(R, R') = \varrho$ et dans $D(0, \varrho)$:

$$\boxed{A(z)\, B(z) = C(z)}$$

Si $a_n = 1$, $B(z) = 1 - z$, on a l'inégalité stricte.

Exemple 16. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x(1-x)}$, convenablement prolongée en 0, est somme, sur $]-1, 1[$, d'une série entière dont on déterminera le rayon de convergence.

2.3 Séries entières d'une variable réelle

- Toutes les fonctions et les suites considérées sont à valeurs complexes.
- Si $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\, x^n$ est une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$, l'intervalle ouvert $]-R, R[$ est appelé **intervalle ouvert de convergence** de la série.

2.3.1 Série dérivée

Définition 4. On appelle série dérivée de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$, la série entière $\boxed{\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}}$.

Proposition 6. *une série entière et sa dérivée ont même rayon de Convergence.*

Démonstration. Soient R et R' les rayons de la série et de sa dérivée. Si $r > R$, la suite $(|a_n|\, r^n)$ n'est pas bornée, donc la suite $((n+1)a_{n+1}\, r^n)$ non plus et donc : $r \geq R'$. Il en résulte :

$$R' \leq R$$

Si $r < R$, choisissons $\rho \in]r, R[$. La suite $(|a_n|\, \rho^n)$ est bornée.

$$|(n+1)a_n|\, r^n = |a_n|\, \rho^n (n+1) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

qui tend vers 0 donc $r \leq R'$. Il en résulte

$$R \leq R'$$

□

Théorème 3. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Alors :*

- *la série converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$,*

– *sa somme f, définie sur $]-R,R[$ est continue sur cet intervalle. Sa primitive F sur cet intervalle, nulle en 0, est la somme de la série entière, de rayon de convergence R, obtenue en intégrant terme à terme la série initiale :*

$$\boxed{F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\qquad \textit{pour } x\in]-R,R[}$$

Exercice 2. Montrer que la fonction $x\mapsto \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est, sur $]-1,1[$, somme d'une série entière de rayon de convergence 1. Même question avec $x\mapsto \ln(x^2-2x\cos\theta+1)$ où $\theta\notin\pi\mathbf{Z}$.

Théorème 4. *La somme f d'une série entière, $\sum a_n x^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. En outre, pour tout entier $k\geq 1$, la dérivée $D^k f$ est, sur $]-R,R[$ somme de la série entière, de rayon de convergence R, obtenue en dérivant k fois terme à terme la série initiale.*

Exemple 17. Pour $p\in\mathbf{N}$ et $-1<x<1$, il vient :

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+p}{n}x^n \tag{2.1}$$

Soit $a\in\mathbf{C}^*$, $p\in\mathbf{N}^*$. La fonction complexe :

$$z\mapsto\frac{1}{(a-z)^p}$$

est somme d'une série entière dans $D(0,|a|)$. [Se ramener à $a=1$ et considérer une fonction auxiliaire d'une variable réelle].

Proposition 7 (Unicité des coefficients). *Dans les circonstances du théorème précédent :*

$$a_k=\frac{D^k f(0)}{k!}=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

On en déduit que si les sommes de deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, de rayons de convergences respectifs R et R', coïncident sur un intervalle $]-r,r[$ avec $0<r\leq\min(R,R')$, alors $a_n=b_n$ pour tout entier n.

Remarque 4 *(Parité de la somme).* Soit $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme définit est une fonction paire *(resp impaire)* sur un intervalle $]-r, r[$ avec $0 < r < R$, alors les coefficients d'indices impairs *(resp pairs)* sont nuls.

Exemple 18 (Prolongement d'une identité algébrique). En utilisant la relation 2.1 page 16, prouver, pour $|z| < 1$, la relation :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{n} z^n$$

2.3.2 Fonction développable en série entière sur un intervalle

Définition 5. Une fonction f, définie sur un intervalle $I =]-r, r[$, avec $r > 0$, est dite *développable en série entière* sur I, s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon $R \geq r$, telle que :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n}$$

Il résulte de la proposition 7 page 16 que **cette série est unique**.

Définition 6 (Séries de Taylor). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[, \mathbf{C})$. On appelle *série de Taylor* de f au point 0, la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. On dit que f est développable en série de Taylor sur $]-r, r[$ si et seulement si, pour tout $x \in]-r, r[$, la série de Taylor de f en 0 converge et :

$$\boxed{\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

D'après la proposition 7 page 16, cela revient à dire que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

Remarque 5. La série de Taylor de f peut très bien converger en tout point sans que $f(t)$ soit égale à sa somme. Exemple :

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{t}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et sa série de Taylor est nulle.

Définition 7. Une application f d'un intervalle I, contenant un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, est dite **développable en série entière au voisinage de** 0 s'il existe $r > 0$ tel que $]-r, r[\subset I$ et que la restriction de f à $]-r, r[$ soit développable en série entière sur cet intervalle.

2.3.3 Développement des fonctions classiques

Les développements ci dessous **doivent être connus absolument**.

Séries géométriques, exponentielles et trigonométriques

Traitées dans l'exemple 3 page 9 . Les rayons de convergence sont traités dans l'exemple 4 page 11.

Le développement du binôme

Pour $\alpha \in \mathbf{C} - \mathbf{N}$, la fonction :

$$\boxed{x \mapsto (1+x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)}}$$

est développable en série entière sur $\boxed{]-1, 1[}$ et :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}$$

Le rayon de convergence de la série valant 1.

Démonstration. Notons f la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. Sur cet intervalle elle vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} (1+x)\,f'(x) &= \alpha\,f(x) && (2.2)\\ f(0) &= 1 && (2.3) \end{aligned}$$

On procède alors par analyse et synthèse.

a) Analyse : on cherche une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\,x^n$ de rayon de convergence $R>0$ dont la somme S vérifie (2.2) sur $]-R,R[$. Comme $S \in \mathcal{C}^\infty(]-R,R[,\mathbf{C})$ et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme, il vient pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\\ S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n\\ x\,S'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n\,x^n\\ (1+x)\,S'(x)-\alpha\,S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\,a_{n+1}+(n-\alpha)\,a_n\right]\,x^n \end{aligned}$$

L'unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)\,S'(x)-\alpha\,S(x)$ sur $]-1,1[$ (proposition 7 page 16) fournit, puisque cette dernière fonction est assujettie à être nulle :

$$\forall n \geq 0 \; a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}\,a_n$$

et $a_0 = S(0) = 1$. D'où il résulte, par récurrence sur n, que :

$$a_0 = 1 \;\text{ et, pour } n \geq 1 :\; a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

b) Synthèse : Si l'on veut se contenter du résultat sans s'occuper de la façon dont on le trouve, la phase d'analyse est inutile. En effet posons :

$$a_0 = 1 \;\text{ et, pour } n \geq 1 :\; a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Puisque $\alpha \notin \mathbf{N}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \to 1 \text{ quand } n \to \infty$$

La série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ a donc 1 comme rayon de convergence. Sa somme S est donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et, d'après les calculs faits dans la phase d'analyse qui sont licites sur $]-1, 1[$ puisqu'on peut y dériver S terme à terme, il vient :

$$(1+x)\, S'(x) = \alpha\, S(x) \tag{2.4}$$
$$S(0) = 1 \tag{2.5}$$

Donc $S = f$ sur $]-1, 1[$ d'après **l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.2), (2.3)** sur cet intervalle.

□

Remarque 6. On trouvera des compléments sur cette importante méthode dans le chapitre 3

Remarque 7. Si $\alpha \in \mathbf{N}$ la fonction est alors un polynôme. Tout ce qui a été fait reste valable sauf le calcul du rayon de convergence qui vaut $+\infty$.

Fonctions se ramenant aux précédentes par dérivation ou intégration

On obtient les développements suivant, dont les rayons de convergence valent 1, par application du théorème d'intégration 3 page 15 aux fonctions $x \mapsto (1+x)^{-1}$ et $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}$$

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}$$

Exercice 3. Montrer que la fonction f définie sur $]-1,1[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) & \text{si } 0<x<1\\[2ex] \dfrac{\arctan\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } -1<x<0\\[2ex] 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Résumé des formules à connaitre

On rappelle la remarque 4 vue à la page 17 : si une fonction f paire *resp impaire* est développable en série entière dans un intervalle $]-r,r[$, ses coefficients de rangs impairs *resp pairs* sont nuls.

En plus du développement de $\frac{1}{1-z}$ pour $z\in\mathbf{C}$, $|z|<1$ qui est conséquence de la formule :

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{n} z^k+\frac{z^{n+1}}{1-z}$$

Les développements en série entière sur lesquels il ne faut pas hésiter sont ceux qui figurent avant la double barre horizontale. Toutes les fonctions sont considérées par rapport à la variable réelle x. On usera des abréviations suivantes :

- ED : équation différentielle.
- I : intégration.
- TI : majoration du reste intégral dans la formule de Taylor.

Les paramètres α et z sont des complexes avec $\alpha \notin \mathbf{N}$.

fonction	développement en série entière	Rayon	Méthode
$(1+x)^\alpha$	$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	ED ou TI
e^{zx}	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} x^n$	∞	ED ou TI
$\cos x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	∞	$\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$
$\sin x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	∞	$\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$
$\operatorname{ch} x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	∞	$\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}}{2}$
$\operatorname{sh} x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	∞	$\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	1	I de $\frac{1}{1+x}$
$\arctan x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	1	I de $\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$x+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	I de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

2.4 Des exemples

Exemple 19. On définit la suite $(d_n)_{n\geq 0}$ d'entiers naturels de la manière suivante :

- on convient que $d_0 = 1$,
- pour $n \geq 1$, d_n est le nombre de manières de décomposer l'entier naturel n en une somme d'entiers naturels *non nuls* **en tenant compte de l'ordre**. Par exemple :

  $$3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$$

  donc $d_3 = 4$
- Exprimer d_n à l'aide des $(d_k)_{0\leq k\leq n-1}$.
- En déduire que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} d_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et calculer sa somme.

– En déduire d_n.
NB : le cas où l'on ne tient pas compte de l'ordre est beaucoup plus difficile et traité dans l'exemple 25 page 35

Exemple 20. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 0 \\ u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n \cos n\theta \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

On considère la suite (v_n) définie de manière analogue avec $n\,\mathrm{e}^{ni\theta}$ comme second membre et la série $\sum v_n x^n$ de rayon R et de somme V

1. Montrer que $R > 0$. On cherchera, pour cela, $A > 0$ et $k > 0$ tels que, pour tout n :
$$|v_n| \leq Ak^n$$
2. Calculer $V(x)$ au voisinage de 0, déterminer (v_n), R et (u_n).
3. La première question était elle utile ?

Exercice 4. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de f, définie par :

$$f(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)\, \mathrm{d}\theta$$

Expliciter le rayon de la série obtenue.

Chapitre 3

Développement de fonctions en série entière

3.1 Fonctions d'une variable réelle

On considère une fonction f, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\delta, \delta[$ $(\delta > 0)$ et à valeurs complexes.

On souhaite savoir s'il existe un réel $r > 0$ (le plus grand possible) tel que $]-r, r[\subset I$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ qui converge sur $]-r, r[$ et telle que :

$$\boxed{\forall x \in]-r, r[,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(x)}$$

Pour cela on va mettre en évidence plusieurs méthodes.

3.1.1 Méthode de l'équation différentielle

Elle est fondée sur le résultat du théorème 4 page 16 : si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, elle y est est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.
On établit sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ (le plus grand possible dépendant de f) une équation différentielle (E) (le plus souvent linéaire d'ordre 1 ou 2) *avec conditions initiales* que f soit la seule à vérifier sur $]-\alpha, \alpha[$ (Pour l'unicité penser au théorème de Cauchy-Lipschitz). Puis on met en évidence *via des calculs formels, sans nécessairement s'occuper de la convergence des séries*

rencontrées, une série entière convergente sur un intervalle ouvert J, centré en 0 *(le plus grand possible ce qui suppose le calcul du rayon de convergence de la série ou, à défaut, une minoration d'icelui)* et dont la somme S y vérifie (E). L'unicité de la solution de (E) sur $]-r,r[=]-\alpha,\alpha[\cap J$ assure alors que $S = f$ sur $]-r,r[$.

Exemples fondamentaux 1. -
- Pour $\alpha \in \mathbf{C}-\mathbf{N}$, la fonction :

$$x \mapsto (1+x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\,\ln(1+x)}$$

  est développable en série entière sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n$$

  Le rayon de convergence de la série valant 1. *Déja vu en 2.3.3*
- Pour $z \in \mathbf{C}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{zx}$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} x^n$$

  Démonstration. Pour z fixé, la série de fonctions du second membre est une série entière de la variable réelle x dont le rayon de convergence est infini (D'alembert). Si $S(x)$ désigne sa somme, le théorème de dérivation terme à terme assure que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ S'(x) = z\,S(x) \ \text{ et } \ S(0) = 0$$

  Or la seule fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ satisfaisant ces conditions est $x \mapsto \mathrm{e}^{zx}$. D'où le résultat qu'on avait déja prouvé autrement. *cf infra* $\square$

Exercice 5. Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \operatorname{Arcsin}^2(x) \quad x \mapsto \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^\alpha$$

Exercice 6. Chercher les solutions développables en série entière au voisinage de 0 des équations différentielles suivantes :

$$x\,y" + 2\,y' + x\,y = 0$$

$$x\,(x^2+1)\,y" - 2\,(x^2+1)\,y' + 2\,x\,y = 0$$
$$(1+x^2)\,y" + 2\,x\,y' = \frac{2}{1+x^2}$$

Intégrer alors ces équations

3.1.2 Méthode d'intégration terme à terme

Fondée sur le théorème 3 : si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ elle y est continue et la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est également développable en série entière sur cet intervalle ; son développement s'obtient en intégrant terme à terme celui de f et les deux séries ont même rayon de convergence.

Exemples fondamentaux 2. -

- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ *resp* $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et :
$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$
resp
$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
le rayon de convergence des séries entières du second membre valant 1.
- La fonction $x \mapsto \arctan x$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et :
$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
le rayon de convergence de la séries entière du second membre valant 1.

Exercice 7. Développer en série entière au voisinage de zéro les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$
$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$x \mapsto \ln(x^2 - 2\rho x\cos\theta + \rho^2) \text{ avec } \rho > 0,\ \theta \notin \pi\mathbf{Z}$$
$$x \mapsto \arctan\left(\frac{x\cos\alpha}{1+x\sin\alpha}\right)$$

3.1.3 Majoration du reste intégral

Principe de la méthode

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $I =]-r, r[$ centré en 0. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f entre 0 et $x \in I$ à l'ordre n s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \,\mathrm{d}t$$

Dans certains cas, on peut montrer directement que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in I$. On en déduit que la série de Taylor :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Converge pour tout $x \in I$ et que sa somme vaut f sur cet intervalle. Il conviendra de majorer au mieux l'intégrale et pour essayer de majorer au mieux $f^{(n)}$ sur $[0, x]$.

Exemple 21. Le développement de l'exponentielle déja vu en début d'année par cette méthode. S'y reporter.

Voici un exemple plus intéressant.

Exemple 22. Considérons la série de fonctions définie par :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+x)}$$

Cette série converge normalement sur $]-1, 1[$; prouvons que sa somme f est développable en série entière sur cet intervalle.

Démonstration. Notons $u_n(x)$ le terme général de la série. Si $x \in]-1, 1[$, il vient, pour $n \geq 2$:

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

La série numérique du second membre est convergente, d'où la convergence normale de la série $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ sur $]-1,1[$.
La fonction u_n est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. Pour $k \leq 1$:

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{n(n+x)^{k+1}}$$

Pour $x \in]-1,1[$, $n \geq 2$, il vient de même :

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{n(n-1)^{k+1}}$$

Donc toutes les séries dérivées de la série de terme général u_n convergent normalement sur $]-1,1[$; en appliquant de façon récurrente le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{n(n+x)^{k+1}}$$

Afin de majorer plus commodément les dérivées, on va prouver que la fonction :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(x)$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$. Soit $x \in]-1,1[$, $k \geq 1$, $t \in [0,x]$. Les lecteurs établiront que :

$$|f^{k+1}(t)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(k+1)!}{n(n-1)} = (k+1)!$$

D'où, avec les notations ci-dessus :

$$|R_k(x)| \leq \frac{k}{k+1}|x|^{k+1}$$

Comme $|x| < 1$, le résultat s'en déduit. f est donc somme de deux fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$, elle l'est donc aussi. $\square$

Fonctions absolument monotones

Tout ce qui concerne ces fonctions est hors programme PC*. Il s'agit d'un exemple à n'étudier que par des étudiants ambitieux. Une fonction absolument monotone sur un intervalle $I =]-R, R[$, est une fonction $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbf{R})$ qui vérifie :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbf{N},\ f^{(n)}(x) \geq 0}$$

On se propose de prouver qu'une telle fonction est développable en série de Taylor sur I.

Proposition 8. *Soit $x \in [0, R[$ et $t \in [0, x]$ alors la série de terme général*

$$\boxed{u_n(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)}$$

est à termes positifs, convergente et sa somme est majorée par $f'(x)$.

Démonstration. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à f' sur $[t, x]$ à l'ordre N soit :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \int_t^x \frac{(x-s)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+2)}(s)\,\mathrm{d}s$$

or le reste $\int_t^x \frac{(x-s)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+2)}(s)\,\mathrm{d}s \geq 0$ donc la somme partielle de rang N de la série est majorée par $f'(x)$ et le résultat suit. □

Proposition 9. *Pour x in $[0, R[$ la série de Taylor de f converge au point x et a pour somme $f(x)$.*

Démonstration. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f à l'ordre N entre 0 et x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la proposition précédente on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (u_N) sur le segment $[0, x]$ avec la domination $0 \leq u_N(t) \leq f'(x)$. Le reste intégral tend donc vers 0 quand $N \to \infty$ et le résultat voulu en découle. □

Théorème 5. *Pour x in $]-R,R[$ la série de Taylor de f converge au point x et a pour somme $f(x)$.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $-R < x < 0$. On observe que, du fait de la croissance et de la positivité de $f^{(n)}$, on a, pour un tel x :

$$\boxed{0 \leq f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(|x|) \ \text{ donc } \ |f^{(n)}(x)| \leq f^{(n)}(|x|)}$$

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f à l'ordre n entre 0 et x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(xt)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\left| x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(xt)\,\mathrm{d}t \right| \leq |x|^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(|x|t)\,\mathrm{d}t$$

et le reste majorant tend vers 0 d'après la proposition précédente appliquée à $|x|$. Le résultat voulu en découle. □

Exercice 8. Appliquer ce qui précède à $x \mapsto= \mathrm{e}^{\operatorname{ch} x}$.

3.1.4 Méthode de l'équation fonctionnelle

Dans certains cas où la fonction à développer est somme d'une série où produit infini, il peut être utile de rechercher une *equation fonctionnelle* satisfaite par f. Le principe est le même que celui de l'équation différentielle.

Exemple 23. Soit $q \in \mathbf{R}$ tel que $|q| < 1$. Le produit infini :

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n x)$$

Converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction fonction f continue et développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. La définition d'un produit infini est analogue à celle des séries. On étudie la suite (f_N) des "produits partiels", définie par :

$$f_N(x) = \prod_{n=0}^{N} (1 + q^n x)$$

Comme les f_N peuvent s'annuler, il n'est pas trés commode d'en prendre le logarithme. On considère la série de fonctions de terme général $u_N = f_{N+1} - f_N$ dont on va prouver la convergence normale sur tout segment de $\mathbf{R}$. Il suffit de se limiter aux segments de la forme $[-r, r]$, $r > 0$. Soit $x \in [-r, r]$:

$$u_N(x) = q^{N+1}x \prod_{n=0}^{N}(1 + q^n x)$$

$$|u_N(x)| \leq q^{N+1}x \prod_{n=0}^{N}(1 + |q^n x|)$$

or

$$\prod_{n=0}^{N}(1 + |q^n x|) \leq \prod_{n=0}^{N}(1 + |q^n r|)$$

Notons v_N cette dernière expression qui est > 0, on peut en prendre le logarithme :

$$\ln(v_N) = \sum_{n=0}^{N} \ln(1 + |q|^n r)$$

On, quand $n \to \infty$, $\ln(1 + |q|^n r) \sim |q|^n r$ puisque $|q|^n \to 0$ vu que $|q| < 1$. Comme la série numérique de terme général $|q|^n r$ converge, il en est de même de la série de terme général $\ln(1 + |q|^n r)$ puisque ces deux séries sont à termes positifs. La suite $(\ln(v_N))$ est donc convergente, soit l sa limite, il vient $v_N \to \mathrm{e}^l = v$ et même $v_N \leq v$ puisque la suite (v_N) est croissante. On en déduit :

$$\forall x \in [-r, r],\ |u_N(x)| \leq v\, r\, |q|^{N+1}$$

Or la série de terme général $v\, r\, |q|^{N+1}$ est une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général u_N est donc normalement convergente sur $[-r, r]$ et, comme r est arbitraire et u_N continue sur $\mathbf{R}$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_N$ est continue sur $\mathbf{R}$. et donc la suite de fonctions (f_N) converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction continue f qu'on convient de noter :

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 + q^n x)$$

(on remarquera que la méthode adoptée est encore valable lorsque $x \in \mathbf{C}$).
Si $x \in \mathbf{R}$, il vient :

$$(1 + x)f_N(qx) = f_{N+1}(x)$$

En faisant tendre N vers l'infini dans cette égalité, on obtient :

$$(E) \quad (1+x)f(qx) = f(x)$$

Avec la "condition initiale" $f(0) = 1$.

Analyse : cherchons maintenant s'il existe une fonction g développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et satisfaisant (E). Si $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, on obtient, en vertu de l'unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n(1-q^n) = a_{n-1}q^{n-1} \end{cases}$$

D'où, puisque $|q| < 1$:

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{q^{k-1}}{1-q^k} \text{ pour } n \geq 1$$

Synthèse : on considère la suite (a_n) définie par les formules ci dessus et on étudie le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$$

Donc $R = +\infty$. Le même calcul que celui fait dans la phase d'analyse (sauf qu'ici on sait que toutes les séries convergent donc les calculs sont légitimes) prouve que la somme g de cette série vérifie (E) pour tout x réel. Au surplus, g est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ *ce qui va nous permettre de montrer que* $g = f$.

Une récurrence laissée aux lecteurs permet d'établir :

$$g(x) = f_N(x)g(q^{N+1}x)$$

Quand $N \to \infty$, la continuité de g en 0 assure que $\lim_{N\to\infty} g(q^{N+1}x) = g(0) = 1$ et donc $g(x) = f(x)$ ce qu'on voulait.

□

Exercice 9. Domaine de convergence et valeur de :

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

3.1.5 Interversion de symboles divers

On traitera simplement deux exemples significatifs.

Exemple 24. Pour $x > -1$, la fonction $t \mapsto \ln(1 + x\sin^2 t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc considérer :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2 t)$$

Montrons que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et déterminons le rayon de convergence de la série obtenue.

Démonstration. fixons x tel que $|x| < 1$. Posons, pour $n \geq 1$:

$$u_n(t) = (-1)^{n-1} \frac{\sin^{2n} t}{n} x^n$$

De sorte que, pour tout t, la série $\sum u_n(t)$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \ln(1 + x\sin^2 t)$$

Il vient pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$|u_n(t)| \leq \frac{|x|^n}{n}$$

La série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbf{R}$. On peut donc écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Le théorème du cours assurant la convergence de la série d'intégrales du premier membre. Après calcul de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$ laissé aux lecteurs (relation de récurrence $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$ *via* une intégration par parties) on trouve donc, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} \frac{x^n}{n}$$

On vérifie que le rayon de convergence de la série est 1 *via* D'Alembert. □

Exemple 25. (Un exemple difficile mais posé en PC*) Pour $x \in]-1,1[$, le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$$

converge. Soit $f(x)$ sa valeur. On se propose de démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

Où p_n est le cardinal de l'ensemble (fini) des suites (α_k) d'entiers naturels nulles à partir du rang $(n+1)$, telles que :

$$\sum_{k=0}^{n} k\alpha_k = n$$

Démonstration. -

a) Remarques préliminaires : notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des suites ci dessus dont le cardinal vaut p_n. Notons aussi, si $N \in \mathbf{N}$ $\mathcal{S}_n(N)$ le sous ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué des suites nulles à partir du rang $(N+1)$ inclus et $a_n(N) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}_n(N))$. Il est clair que :

$$\mathcal{S}_n(N) = \mathcal{S}_n \text{ pour } N \geq n$$

b) Convergence du produit infini : soit $x \in]-1,1[$, $P_N(x) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-x^n}$ le produit partiel. Comme tous les facteurs de ce produit sont > 0, on peut écrire :

$$\ln(P_N(x)) = \sum_{n=1}^{N} \ln(1-x^n)$$

Qui est la somme de rang N de la série de terme général $\ln(1-x^n)$, or, quand $n \to \infty$:

$$|\ln(1-x^n)| \sim |x|^n$$

On $\sum |x|^n$ est à termes positifs et convergente puisque $|x| < 1$ donc $\sum \ln(1-x^n)$ est absolument convergente et la suite $(\ln(P_N(x)))$ aussi ; si t est sa limite, il vient :

$$\lim_{N\to\infty} P_N(x) = \mathrm{e}^t > 0$$

c) Développement du produit partiel : on va prouver l'hypothèse de récurrence sur H_N suivante :
la série entière $\sum a_n(N)x^n$ converge pour $|x| < 1$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ P_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(N)x^n$$

H_1 est vérifiée puisque $a_n(1) = 1$ pour tout n. Supposons (H_{N-1}) vraie pour un entier $N \geq 2$ et prouvons (H_N). En notant (b_n) la suite d'entiers définie par :

$$\begin{cases} b_n = 1 & \text{si } N \quad \text{divise} \quad n \\ b_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On va, plus précisément, prouver la relation :

$$(R) \quad a_n(N) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(N-1)b_k$$

Pour cela, on va classer [1] l'ensemble des N-uples $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ d'entiers vérifiant $\alpha_1 + 2\alpha_2, \ldots, +N\alpha_N = n$ en fonction de l'entier $k = N\alpha_N$. Pour $k \in [0 \ldots n]$, on note E_k l'ensemble des N-uples vérifiant $\alpha_1 + 2\alpha_2, \ldots, +N\alpha_N = n$ et $N\alpha_N = k$.
Tout N-uple est dans un E_k et un seul. Le nombre de N-uples est donc :

$$a_n(N) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(E_k)$$

Reste à calculer $\mathrm{Card}(E_k)$. Deux cas se présentent :
- k n'est pas multiple de N. $\mathrm{Card}(E_k) = 0$ mais b_k aussi. Il ne coûte donc rien d'écrire $\mathrm{Card}(E_k) = b_k a_{n-k}(N-1)$.
- k est multiple de N donc s'écrit sous la forme $N\alpha_N$ pour un unique entier α_N. Le nombre d'élements de E_k est donc le nombre de $N-1$-uples $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1})$ tels que :

  $$\alpha_1 + 2\alpha_2, \ldots, +(N-1)\alpha_{N-1} = n - k$$

  dont le cardinal est précisément $a_n(N-1)$; comme $b_k = 1$, il vient $\mathrm{Card}(E_k) = b_k a_{n-k}(N-1)$.

[1] Dénombrer c'est classer, le tout est de trouver le bon critère

D'où la relation (R). D'après l'hypothèse de récurrence, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(N-1)x^n$ est ≥ 1. Donc cette série converge absolument pour $|x| < 1$. Il en est de même de $\sum b_n x^n$ qui est une série géométrique de somme $\dfrac{1}{1-x^N}$. Le produit de Cauchy de ces deux séries est, d'après (R), la série entière de terme général $a_n(N)x^n$ qui converge donc absolument pour $|x| < 1$ et dont la somme vaut :

$$\frac{1}{1-x^N} P_{N-1}(x) = P_N(x)$$

H_N est donc prouvée. En surplus, puisque $a_n(N) \geq 1$ (pourquoi ?), le rayon de convergence de $\sum a_n(N)x^n$ vaut 1.

d) Développement en série entière de f : soit $t \in [0, 1[$. Si $q \in \mathbf{N}$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{q} a_n(N)t^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(N)t^n = P_N(t) \leq f(t)$$

En choisissant $N > q$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{q} p_n t^n \leq f(t)$$

D'où la convergence de la série $\sum p_n t^n$ qui est à termes positifs et dont toutes les sommes partielles sont majorées (en libérant q). Il vient alors, pour $x \in]-1, 1[$:

$$a_n(N)|x|^n \leq p_n|x|^n$$

Donc x *restant fixé*, la série de fonctions de la variable N, de terme général :

$$N \mapsto a_n(N)x^n$$

est normalement convergente sur $\mathbf{N}$. De plus :

$$\lim_{N\to\infty} a_n(N)x^n = p_n x^n$$

D'où, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(N)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

C'est à dire, puisque la fonction du premier membre vaut $P_N(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

L'égalité valant pour $x \in]-1,1[$, le rayon de convergence de $\sum p_n x^n$ est ≥ 1 Comme $p_n \geq 1$ pour tout n (pourquoi ?), ce rayon vaut 1.

$\square$

Exercice 10 (Analycité des fonctions développables en série entière). (Difficile) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Si f est sa somme dans $]-R, R[$, prouver que, si $|a| < R$, il existe une série entière $\sum b_n x^n$, convergente dans un intervalle $]a-r, a+r[$ avec $r \leq R - |a|$ telle que :

$$\forall x \in]a-r, a+r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$$

3.2 Fonctions d'une variable complexe

Seule la continuité des fonctions d'une variable complexe est au programme. On rappelle la proposition 3 : la somme d'une série entière qui converge dans un disque ouvert du plan complexe, centré en 0, est continue dans ce disque. Étant donné une fonction f définie et continue dans un disque ouvert du plan complexe, centré en 0, on se propose d'étudier ci cette fonction est développable en série entière dans ce dsque.

3.2.1 Utilisation d'une fonction auxiliaire d'une variable réelle

En particulier, les méthodes, présentées ci-dessus, utilisant la dérivation ou l'intégration des fonctions ne peuvent s'étendre qu'en utilisant des fonctions auxiliaires d'une variable réelle.

Principe de la méthode

On remarque que, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et si $|z| < R$, La série de fonction $\sum u_n(t)$, où $u_n(t)$ est la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$u_n(t) = a_n z^n t^n = a_n (zt)^n$$

Converge normalement sur $[0,1]$ puisque :

$$|u_n(t)| \leq |a_n||z|^n$$

ainsi que ses dérivées successives (pourquoi ?) On pourra donc, puisqu'il s'agit d'une série entière de la variable réelle t, intégrer ou dériver terme à terme cette série. Le principe revient, au fond, à paramétrer le segment $[0,z]$.

Exemples fondamentaux 3 (La fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$). On a vu précédemment que la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ avait un rayon de convergence infini et que :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n$$

En particulier, pour $t = 1$:

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

La détermination principale du logarithme complexe

Elle est définie, pour $z \in \Delta = \mathbf{C} - \mathbf{R}_-$, par :

$$\ln(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$$

Où $\mathrm{Arg}(z)$ désigne la détermination de l'argument de z qui appartient à $]-\pi,\pi[$:

$$\theta = \mathrm{Arg}(z) \Longleftrightarrow \theta \in]-\pi,\pi[\text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{z}{|z|}$$

En particulier, si $z \in]0,+\infty[$, on retrouve le logarithme népérien ordinaire et si $z \in \Delta$:

$$\mathrm{e}^{\ln(z)} = \mathrm{e}^{\ln(|z|)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z))} = |z| \times \frac{z}{|z|} = z$$

On admettra provisoirement la continuité de ln sur Δ et qu'il n'existe pas de fonction continue, définie sur un domaine contenant strictement Δ et vérifiant cette relation.

Proposition 10. *Soit $z \in D(0,1)$, alors :*
- $1+z \in \Delta$ *car* $\mathrm{Re}(1+z) > 0$
- *La série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ *converge et sa somme vaut* $\ln(1+z)$

Démonstration. C'est une application de la méthode ci-dessus décrite. Le rayon de convergence de la série vaut 1 par d'Alembert. Soit z tel que $|z| < 1$. On introduit la fonction auxiliaire $u_n(t)$, définie sur $[0,1]$ par :

$$u_n(t) = (-1)^{n-1} \frac{z^n t^n}{n}$$

$$u_n'(t) = (-1)^{n-1} z^n t^{n-1} \text{ donc } |u_n'(t)| \leq |z|^n$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)$ converge normalement sur $[0,1]$ et, comme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ également, la fonction f, définie sur $[0,1]$ par :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$$

est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec :

$$\forall t \in [0,1],\ f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) = \frac{z}{1+tz}$$

Comme $f(0) = 1$, il s'ensuit :

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \int_0^1 \frac{z\,\mathrm{d}t}{1+tz}$$

Reste à calculer l'intégrale. Ce qui sera fait en exercice et donne le bon résultat.
On peut cependant procéder plus rapidement. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$g(t) = \mathrm{e}^{f(t)}$$

g est de classe C^1 sur $[0,1]$, comme l'est f et :

$$\forall t \in [0,1],\ g'(t) = f'(t)g(t) = \frac{z}{1+tz} g(t) \text{ et } g(0) = 1$$

Or la fonction $t \mapsto 1 + tz$ satisfait la même équation différentielle avec la même condition initiale sur $[0, 1]$. Donc, vu l'unicité de la solution d'une telle équation :

$$\forall t \in [0, 1],\ g(t) = 1 + zt$$

Or $|\operatorname{Re}(zt)| \leq |zt| < 1$ donc $\operatorname{Re}(1 + zt) > 0$ et $1 + zt \in \Delta$. D'après ce qui a été vu plus haut :

$$\mathrm{e}^{\ln(1+zt)} = 1 + zt$$

Donc, pour chaque $t \in [0, 1]$, il existe un entier relatif $k(t)$ tel que :

$$\ln(1 + zt) - f(t) = 2k(t)\mathrm{i}\pi$$

Comme le premier membre est une fonction continue de t, k l'est aussi et à valeurs dans $\mathbf{Z}$ donc est constante, comme $k(0) = 0$, il en résulte :

$$\forall t \in [0, 1],\ f(t) = \ln(1 + zt)$$

D'où le résultat en faisant $t = 1$. $\square$

Exercice 11. Pour $|z| < 1$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, on pose :

$$(1 + z)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+z)}$$

Montrer que cette fonction est développable en série entière dans $D(0, 1)$ et en déterminer le développement.

Exercice 12 (Analycité de la somme d'une série entière dans le disque ouvert de convergence). Cet exercice généralise l'exercice 10. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe telle que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ soit strictement positif. On note f la somme de cette série dans le disque ouvert $D(0, R)$.

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n\, z^{n-k}$ admet R comme rayon de convergence. On note $f_k(z)$ sa somme dans $D(0, R)$. Soit $a \in D(0, R)$. On se propose de montrer que, pour $|h| < R - |a|$, la série de terme général $\frac{f_k(a)}{k!}\, h^k$ converge et que sa somme vaut $f(a + h)$.
   (a) Montrer que la fonction ϕ définie sur $[0, 1]$ par $\phi(t) = f(a + th)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et exprimer $\phi^{(k)}(t)$ à l'aide de $f_k(a + th)$.

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} |a_n|\, x^n$?
On note $g(x)$ sa somme pour $|x| < R$. Prouver, pour $t \in [0,1]$, l'inégalité :

$$|\phi^{k+1}(t)| \leq g^{(k+1)}(|a| + t|h|)|h|^{k+1}$$

Démontrer que la série de terme général :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(|a| + t|h|)|h|^{k+1}\, \mathrm{d}t$$

converge *(appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à g' entre $|a| + t|h|$ et $|a| + |h|$)* et conclure.

3.2.2 Recherche à priori des coefficients

Minoration du rayon de convergence

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit r tel que $0 < r < R$. La suite $(|a_n|r^n)$ est bornée. Si M est l'un de ses majorants :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |a_n| \leq Mk^n \text{ avec } k = \frac{1}{r}$$

Réciproquement, si une telle majoration a lieu, le rayon de convergence de la série est $\geq \frac{1}{k}$. (pourquoi ?)

Exemple 26 (Développement en série entière de l'inverse d'une fonction). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme dans $D(0,R)$ est notée $f(z)$. On suppose $f(0) = a_0 \neq 0$. Alors

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

est définie dans un disque ouvert non vide de centre 0 et y est développable en série entière.

Démonstration. La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|x^n$ a R comme rayon de convergence (pourquoi ?). Sa somme ϕ est définie et continue sur $]-R,R[$. Comme $\phi(0) = 0$, la continuité de ϕ en 0 assure :

$$\exists x,\ 0 < x < R,\ |\phi(x)| < |a_0|$$

Posons $\frac{1}{x} = k > 0$. Définissons alors formellement, par récurrence, la suite (b_n) des futurs coefficients du développement en série entière de g c'est à dire :

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_0} \\ b_n = -\frac{1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

posons $A = |b_0| > 0$ et émettons l'hypothèse de récurrence H_n :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ |b_i| \leq Ak^i$$

H_0 résulte du choix de A, supposons H_{n-1} vérifiée pour un certain entier $n \geq 1$ et majorons $|b_n|$:

$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_{n-i}| \leq \frac{A}{|a_0|} \sum_{i=1}^{n} |a_i| k^{n-i} \leq \frac{A}{|a_0|} k^n \phi\left(\frac{1}{k}\right) \leq Ak^n$$

D'où H_n (Les lecteurs reprendront en détail cette suite de majorations en essayant de comprendre comment on a pu choisir A et k). Les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ convergent absolument pour $|z| < \frac{1}{k}$ (pourquoi), il en est donc de même de leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$. Or, vu la définition des b_n :

$$c_0 = 1 \text{ et } c_n = 0 \text{ pour } n \geq 1$$

En notant g la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ dans $D(0, \frac{1}{k})$, il en résulte :

$$\forall z \in D\left(0, \frac{1}{k}\right),\ f(z)g(z) = 1$$

D'où le résultat annoncé. *[La détermination exacte du rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ est hors d'atteinte (en général) avec le programme de Taupe. On verra quelques exemples simples de ce type de problème dans la section 5.3]* □

Exercice 13. Montrer, en utilisant une équation différentielle que la fonction tan est développable en série entière au voisinage de 0.

Exemple 27 (Centrale). Tracer le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + \ln(1 - x)}$$

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

3.2.3 Prolongement analytique

Méthode fondée sur la proposition 7 : soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$. S'il existe $r > 0$ tel que $r < \min(R_1, R_2)$ et que les sommes de ces deux séries coïncident dans $]-r, r[$ *(resp* $D(0, r)$) alors :

$$a_n = b_n \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}$$

Il s'ensuit que $R_1 = R_2$ et que les sommes des deux séries coïncident sur $D(0, R_1)$.

De manière générale une fonction développable en série entière est déterminée par sa connaissance sur un voisinage d'un point du disque (ou de l 'intervalle) de convergence. On peut se servir de cette propriété pour prolonger des identités algébriques entre deux sommes de séries entières à tout un disque ouvert centré en 0.

3.2.4 Cas des fractions rationnelles

Proposition 11. *Soit p un entier naturel > 0. Le rayon de convergence de la série entière :*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} z^n$$

vaut 1. *Sa somme est égale à*

$$\frac{1}{(1+z)^p}$$

Dans le disque $D(0, 1)$.

Démonstration. Le rayon de convergence résulte de la règle de d'Alembert. Soit $f(z)$ la somme de la série ci-dessus pour $|z| < 1$. La fonction $g(z) = (1+z)^p f(z)$ est développable en série entière dans $D(0, 1)$ (pourquoi ?) et $g(x) = 1$ pour $-1 < x < 1$ (développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{-p}$). On en déduit $g(z) = 1$ dans $D(0, 1)$. □

Proposition 12. *Soient P et Q deux polynômes à coefficients complexes avec :*

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{p_i} \text{ et } P(a_i) \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq r$$

On suppose qu'aucun a_i *n'est nul, qu'ils sont tous distincts et que* $p_i \in \mathbf{N}^*$. *Soit* $f = \frac{P}{Q}$ *et* $R = \min(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_r|) > 0$. *Il existe une série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n$ *de rayon de convergence* R *telle que :*

$$\forall z \in D(0,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, z^n$$

Démonstration. Chaque élément simple de f est somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou egal à R. f est donc somme dans $D(0,R)$ d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n$ de rayon de convergence $R' \geq R$. Supposons que $R' > R$. Il existe un zéro de Q, soit a_i, tel que $|a_i| = R$. La série étant normalement convergente dans le disque *fermé* $D_f(0,R)$, sa somme y est bornée par un réel M. Soit (z_n) une suite d'éléments de $D_f(0,R)$ qui tend vers a_i (par exemple $z_n = a_i \frac{n}{n+1}$) ;

$$|(z_n - a_i)^p f(z)| \leq |z_n - a_i|^p M \to 0$$

On en déduit $P(a_i) = 0$, ce qui n'est pas, donc $R' = R$. □

Chapitre 4

Calcul de sommes de séries

4.1 Cas des séries entières

4.1.1 Séries de la forme $\sum P(n)z^n$

Principe de la méthode

Il suffirait de connaître $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k\, z^n$ mais on observe qu'on peut obtenir facilement :

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)x^n = \frac{k!\, x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

par dérivations successives de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. D'où l'idée de décomposer le polynôme $P \in \mathbf{C}_N[X]$ dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_N)$ de $\mathbf{C}_N[X]$ constituée des polynômes de Hilbert :

$$H_k(X) = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$$

En remarquant que, pour $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_k(n)x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Le rayon de convergence de la série valant 1.

Exemple 28.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^3-n^2+1)z^n$$

(Traité en cours)

4.1.2 Séries de la forme $\sum F(n)x^n$

Où $F \in \mathbf{C}(X)$:

Exemple 29.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}x^n$$

et, avec Maple :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(3n+1)}x^n$$

(Traité en cours)

4.1.3 Séries de la forme $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$

Où $P \in \mathbf{C}[X]$. Même technique que dans 4.1.1

Exemple 30.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3-2n+1}{n!}$$

(Traité en cours)

4.1.4 Séries de la forme $\sum a_n z^n$ où $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est une fraction rationnelle simple

On va traiter le cas, assez fréquent, où degré de $\deg F = 0$, c'est à dire où $F(n) = \frac{P(n)}{Q(n)}$ avec $\deg P = \deg Q$. Il en résulte que, si a et b sont les coefficients dominants de P et Q :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{b} = \lambda \neq 0$$

Le rayon R vaut $|\frac{1}{\lambda}|$.

Principe de la méthode

On décompose F en éléments simples *avec la partie entière* λ

$$F(n) = \lambda + \phi(n)$$

Où $\phi(n)$ représente la somme des éléments simples de F. Pour $|x| < R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(n) x^{n+1}$$

(après justification que chaque série converge) d'où :

$$(1 - \lambda x) f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(n) x^{n+1}$$

En séparant les séries relatives à chaque élément simple, on obtient une équation différentielle en dérivant (éventuellement plusieurs fois) le tout.

Exemple 31. Dans l'étude de l'exemple 24 on a établi que la fonction y définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x \sin^2 t)\, \mathrm{d}t$$

était développable en série entière sur $]-1, 1[$:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3 \ldots 2n-1}{2.4 \ldots 2n} \frac{x^n}{n} \qquad \text{pour } |x| < 1$$

On se propose ici de calculer la somme de cette série entière.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

avec :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \\ a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1.3 \ldots 2n-1}{2.4 \ldots 2n} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

De sorte que :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} \text{ pour } n \geq 1$$

Il vient alors (sauf erreur de calcul) pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$:

$$y(x) = \ln\left(x\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\right) - 2\ln 2, \quad y(0) = 0$$

Démonstration. Le terme a_0 est nul, on utilise la méthode générale à partir de a_1. Tous les réels x considérés appartiennent à $]-1,1[$:

$$y(x) = \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2}x^{n+1}$$

$$\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} = 1 - \frac{3n+2}{2(n+1)^2} = 1 - \frac{3}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Donc, vu que toutes les séries entières ci-dessous convergent :

$$y(x) = \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{3}{2(n+1)}x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2(n+1)^2}x^{n+1}$$

$$(1+x)y(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Toutes ces séries entières ayant 1 comme rayon de convergence, on peut dériver terme à terme cette dernière relation pour $n \leq 1$:

$$(1+x)y'(x) + y(x) = \frac{3}{2}y(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{(n+1)}$$

En remultipliant la relation obtenue par x et en redérivant, il vient :

$$x(1+x)y"(x) + \frac{3x+2}{2}y'(x) = \frac{1}{2}$$

En posant $z(x) = y'(x)$, $z \in C^\infty]-1,1[$ et vérifie :

$$x(1+x)z'(x) + \frac{3x+2}{2}z(x) = \frac{1}{2} \text{ et } z(0) = \frac{1}{2}$$

Comme le coefficient de z' s'annule, Maple ne sait pas intégrer cette équation avec une condition initiale en 0. La théorie ne permet d'en chercher les solutions que sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$. On trouve :

$$\begin{cases} z(x) = \frac{1}{x} + \frac{A}{x\sqrt{1+x}} & \text{sur }]-1,0[\\ z(x) = \frac{1}{x} + \frac{B}{x\sqrt{1+x}} & \text{sur }]0,1[\end{cases}$$

Comme z est continue en 0, l'examen des limites de chacune de ces expressions en 0 impose $A = B = -1$, on vérifie bien que la fonction :

$$\begin{cases} z(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}} & \text{sur }]-1,0[\cup]0,1[\\ z(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

est continue en 0 (la seule utilité de cette vérification est de voir si les calculs sont cohérents). Il vient donc, puisque z est continue sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ y(x) = \int_0^x z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\right)\mathrm{d}t$$

Pour calculer cette intégrale, il faut la scinder en deux mais les fonctions :

$$t \mapsto \frac{1}{t} \text{ et } t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1+t}}$$

ne sont pas intégrables sur $[0,x]$. Il faut donc séparer les cas $x > 0$ et $x < 0$ en isolant la valeur 0. Soit $0 < h < x$. On considère :

$$\int_h^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\right)\mathrm{d}t$$

qu'on peut scinder en deux puisque les fonctions considérées sont continues sur $[h,x]$:

$$= \int_h^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_h^x \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

Pour calculer la deuxième intégrale, on pose $u = \sqrt{1+t}$ et :

$$\int_h^x \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = -2\int_{\sqrt{1+h}}^{\sqrt{1+x}} \frac{du}{1-u^2} = -\left[\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_{\sqrt{1+h}}^{\sqrt{1+x}}$$

On regroupe les deux intégrales, en supprimant les valeurs absolues, via les signes des expressions et en regroupant les deux termes qui ont chacun une limite infinie quand $h \to 0$ mais dont la sommme a une limite finie :

$$\int_h^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_h^x \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\right) - \ln(1+\sqrt{1+h}) + \ln\left(x\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\right)$$

Or $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \sim \frac{1}{2}$ quand $h \to 0$ d'où la formule voulue en faisnt tendre h vers 0. Les lecteurs traiteront, de même le cas $x < 0$. $\square$

Exercice 14. Calculer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\mathrm{C}_{2n}^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_{2n}^n\, x^n$$

4.1.5 Séries à lacunes régulières

Exemple 32. Calculer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$$

4.1.6 Interversion de symboles

Exemple 33. Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ avec :

$$u_n = \int_0^1 t\,(t-1)\dots(t-n+1)\,\mathrm{d}t$$

4.2 Méthode générale dans les autres cas

Soit on introduit une série entière (ou plus loin une série de Fourier) qui génére le terme général de la série à sommer soit on procède par télescopage des termes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$$

Chapitre 5

Propriétés de la somme au bord du disque de convergence

5.1 Limite radiale

Le théorème suivant est au programme mais admis.

Théorème 6 (Abel). *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre complexes telle que la série entière de terme général $a_n\, z^n$ ait un rayon de convergence $R \in]0,+\infty[$. Si la série de terme général $a_n\, R^n$ converge, la fonction f définie dans l'intervalle $]-R,R]$ par :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

est continue au point R. Résultat analogue au point $-R$.

5.2 Exemple de comportement asymptotique

Exemple 34. Comportement asymptotique de la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \ln n\, x^n$$

au voisinage de ± 1. On précisera numériquement sa limite en -1.

5.3 Utilisation de propriétés de la somme au bord du disque de convergence pour déterminer le rayon de convergence

Le plus souvent, lorsqu'on cherche à développer une fonction en série entière, on arrive à expliciter les coefficients du développement cherché de manière suffisamment simple pour pouvoir étudier le rayon de convergence de la série obtenue. On procède par encadrements géométriques, éventuellement simplifiés par des recherches d'équivalents ou en utilisant, quand c'est possible, la règle de D'Alembert. L'objet de cette partie est d'étudier quelques cas où la forme des coefficients n'est pas simple. Il faut alors s'aider du comportement asymptotique de la fonction à développer au bord de ce que l'on suppute être l'intervalle de convergence ou le disque de convergence dans les cas les plus difficiles. L'exemple des fractions rationnelles a déja été étudié dans la section 3.2.4.

5.3.1 Un exemple "simple"

On considère la fonction y défine sur $[-2,1]$ par :

$$y(x)=\sqrt{(2+x)(1-x)}$$

On se propose d'étudier le rayon de convergence de son développement en série entière au voisinage de 0.

a) Minoration du rayon : pour $x\in]-1,1[$, on peut écrire $y(x)=u(x)v(x)$ avec :

$$u(x)=\sqrt{1-x} \quad \text{et} \quad v(x)=\sqrt{2+x}$$

u est développable en série entière sur $]-1,1[$. Son développement s'écrit :

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

avec :

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=-1/2 \\ a_n=\frac{1/2(1/2-1)...(1/2-n+1)}{n!}(-1)^n=-\frac{1.3...(2n-3)}{2^n\,n!} \quad \text{pour } n\geq 2 \end{cases}$$

$v(x) = \sqrt{2}(1 + x/2)^{1/2}$ est développable en série entière sur $]-2,2[$. Son développement s'écrit :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

avec :

$$\begin{cases} b_0 = \sqrt{2} \\ b_1 = \sqrt{2}/4 \\ b_n = \sqrt{2}\frac{1/2(1/2-1)\ldots(1/2-n+1)}{2^n\, n!} = \sqrt{2}(-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{4^n\, n!} \qquad \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Par produit de Cauchy, y est donc développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement s'écrit :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Si R est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$, il vient $R \geq 1$ mais l'expression des c_n est trop compliquée pour qu'on puisse en déduire une majoration directe de R.

b) Majoration du rayon : o s'aide du comportement de y au voisinage de 1. Supposons que $R > 1$. Notons alors $U(x)$ la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$ sur $]-R,R[$. La fonction U est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur cet intervalle et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ U(x) = y(x)$$

Donc :

$$\forall x \in]-1,1[,\ U'(x) = y'(x) = \frac{-1-2x}{2\sqrt{(1-x)(2+x)}}$$

Donc

$$\lim_{x\to 1_-} U'(x) = -\infty$$

ce qui contredit la continuité de U' au point $1 \in]-R,R[$. Donc $R = 1$

5.3.2 Développement en série entière de l'exponentielle d'une fonction

Soit u une fonction à valeurs complexe développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ avec $0 < R \leq +\infty$. On se propose de prouver que la fonction y définie sur $]-R,R[$ par :

$$y(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$$

l'est aussi. Pour cela, on observe que $y \in \mathcal{C}^\infty(]-R,R[,\mathbf{C})$ et vérifie sur cet intervalle l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \quad y'(x) = u'(x)\,y(x) \quad \text{avec} \quad y(0) = \mathrm{e}^{u(0)}$$

Comme, d'après le cours, u' est aussi développable en série entière sur $]-R,R[$, on va travailler directement avec les coefficients de son développement. On pose donc :

$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{pour } -R < x < R$$

a) Analyse : supposons d'abord que y soit développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[\subset]-R,R[$ avec $r > 0$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{pour } -r < x < r$$

y' l'est également et on peut dériver terme à terme le développement de y :

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n \quad \text{pour } -r < x < r$$

Le produit $u'y$ est développable en série entière sur $]-r,r[$:

$$u'(x)\,y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{pour } -r < x < r$$

avec, pour $n \geq 0$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

D'après l'équation (E) et l'unicité des coefficients du développement en série entière d'une fonction, il vient, pour tout entier $n \geq 0$:

$$c_n = (n+1)a_{n+1}$$

soit :

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

avec la condition initiale $a_0 = y(0) = \mathrm{e}^{u(0)}$.

b) Synthèse : on définit une suite récurrente (a_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \mathrm{e}^{u(0)} \\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

et on va prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est $\geq R$ puis que la somme y de cette série vaut e^u en prouvant qu'elle vérifie le problème de Cauchy (E).

Fixons un réel r tel que $0 \leq r < R$ et prouvons que la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée. On pose, pour cela :

$$M_n = \max_{0\leq k\leq n} |a_k| r^k$$

$$|a_{n+1}| r^{n+1} \leq \frac{r}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k \, |b_{n-k}| r^{n-k}\right) \leq \frac{M_n\, r}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} |b_k| r^k\right)$$

en ayant remarqué que :

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{n-k}| r^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} |b_k| r^k$$

Or, puisque $0 \leq r < R$, la série $\sum\limits_{k\geq 0} |b_k| r^k$ converge. Si S est sa somme, il vient, vu la positivité des termes de cette série :

$$|a_{n+1}| r^{n+1} \leq M_n \frac{Sr}{n+1}$$

Puisque la suite de terle général $\frac{Sr}{n+1}$ tend vers 0, il existe un rang N tel que :

$$n > N \Rightarrow 0 \leq \frac{Sr}{n+1} < 1$$

donc, pour $n > N$, $|a_{n+1}|r^{n+1} \leq M_n$ d'où :

$$M_{n+1} = \max(M_n, |a_{n+1}|r^{n+1}) = M_n$$

La suite (M_n) est donc constante à partir du rang $N+1$, elle est donc bornée. Il en est de même de la suite $(|a_n|r^n)$ puisque, pour tout n :

$$0 \leq |a_n|r^n \leq M_n$$

On a donc établi que, pour tout $r \in [0, R[$, la suite $(|a_n|r^n)$ est bornée donc le rayon de convergence R' de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ vérifie :

$$\forall r \in [0, R[,\ R' \geq r$$

en faisant tendre r vers R, on en déduit :

$$R' \geq R$$

Notons maintenant $y(x)$ la somme de cette série pour $-R < x < R$. Les calculs faits dans la phase d'analyse sont, d'après les propriétés des sommes des séries entières (dérivation terme à terme et produit de Cauchy), valables sur l'intervalle $]-R, R[$ [1]. y satisfait le problème de Cauchy (E) sur $]-R, R[$ et donc, d'après l'unicité d'une solution d'icelui :

$$y(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \quad \text{pour} \quad -R < x < R$$

Remarque 8. On peut avoir $R' > R$ comme le montre l'exemple $u(x) = \ln(1+x)$: $R = 1$ et $R' = +\infty$.

5.3.3 Une application

Considérons le trinôme du second degré :

$$T(x) = x^2 - 2rx\cos\theta + r^2$$

[1] Si on n'en est pas convaincu, il faut les reprendre pas à pas en justifiant à chaque étape

avec $r > 0$ et $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$. Ses racines sont $r\,\mathrm{e}^{i\pm\theta}$. $T(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrons que la fonction :

$$y(x) = \sqrt{x^2 - 2rx\cos\theta + r^2}$$

est développable en série entière sur $]-r, r[$ et que le rayon de convergence de son développement en série entière vaut r.

a) Montrons que y est développable en série entière pour $|x| < r$: on remarque que :

$$y(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$$

avec

$$u(x) = \frac{\ln(T(x))}{2}$$

Prouvons que u est développable en série entière sur $]-r, r[$. Elle y est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$u'(x) = \frac{T'(x)}{2\,T(x)} = \frac{x - r\cos\theta}{x^2 - 2rx\cos\theta + r^2}$$

qui se décompose en éléments simples sur $\mathbf{C}$ [2] :

$$u'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{1}{x - r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\right]$$

Chacun de ces termes se décompose en série géométrique convergente sur $]-r, r[$:

$$\frac{1}{x - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{r^{n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}$$

Donc, pour $|x| < r$, $u'(x)$ est somme de la série entière :

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n+1)\theta\,x^n}{r^{n+1}}$$

Le cours assure alors que u est développable en série entière sur $]-r, r[$, son développement en série entière s'obtenant en intégrant le précédent terme à terme.

On a alors prouvé que $y = \mathrm{e}^u$ était développable en série entière sur $]-r, r[$. Notons R le rayon de convergence de la série, de sorte que $R \geq r$.

[2] Je rappelle que la décomposition de P'/P où P est un polynôme scindé doit être connue

b) Preuve que $R = r$: c'est délicat. On va essayer la même technique que dans le premier exemple ci-dessus mais les racines de T sont maintenant complexes. On va donc introduire des fonctions complexes qui prolongent y et y' et utiliser une technique de prolongement analytique des identités algébriques en regardant ce qui se passe au voisinage d'une racine de T.

Posons

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{pour} \quad |x| < r$$

D'où :

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{pour} \quad |x| < r$$

avec, pour tout n, $b_n = (n+1)a_{n+1}$. Supposons que le rayon de convergence R, commun à ces deux séries, soit $> r$ et relevons une contradiction.

Introduisons les séries entières de la variable complexe z :

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

Ces séries convergent dans le disque ouvert :

$$D(0,R) = \{z \in \mathbf{C},\ |z| < R\}$$

Notons $U(z)$ et $V(z)$ leurs sommes pour $|z| < R$. La série produit de Cauchy :

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

avec, pour tout n :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

converge aussi pour $|z| < R$. Si W est sa somme, il vient :

$$\forall z \in D(0,R),\ W(z) = U(z)V(z)$$

Or, pour $x \in]-r, r[$:

$$U(x) = y(x) \quad V(x) = y'(x) \quad W(x) = y(x)y'(x) = x - r\cos\theta$$

D'après l'unicité du développement en série entière de la fonction W sur $]-r, r[$, il vient :

$$\begin{cases} c_0 = -r\cos\theta \\ c_1 = 1 \\ c_n = 0 & \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

c'est le prolongement analytique de la relation algébrique :

$$U(x)V(x) = x - r\cos\theta$$

à tout le disque $D(0,R)$. Donc, pour tout complexe z tel que $|z| < R$, il vient :

$$W(z) = z - r\cos\theta$$

soit :

$$\forall z \in D(0,R),\ U(z)V(z) = z - r\cos\theta \tag{5.1}$$

De la même manière, on prouve que :

$$\forall z \in D(0,R),\ U(z)^2 = z^2 - 2rz\cos\theta + r^2$$

et donc $U\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = 0$ ce qui contredit la relation (5.1).

Chapitre 6

Travaux dirigés

6.1 Calculs de rayons de convergence

Exercice 15 (Ccp 2000). Soit $a > 0$. Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a^n\, z^{n!}$?

Exercice 16 (Centrale 2008). Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$, que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n^2\, z^n$?

Exercice 17 (Esim 2001). Trouver le rayon de convergence de :

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^n\, x^{n^2}$$

Exercice 18 (Centrale 2004). Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$, que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}\, z^n$?

Exercice 19 (Mines 2001). Soit (a_n) une suite réelle strictement positive telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{n-1}\, a_{n+1}} = l \neq 1$$

Étudier le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ suivant l.

Exercice 20 (Mines 1999). Calculer, pour tout réel α, le rayon de convergence de :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}+\alpha\right)z\right]^k$$

Exercice 21. Si $\sum\limits_{n\geq 1} a_n\,x^n$ est une série entière de rayon de convergence R. Que dire du rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n n^{\alpha}\,x^n$?

Exercice 22 (CCP 1998). $a_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. Comparer les rayons de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et de $\sum\limits_{n\geq 0}(1/a_n)\,z^n$.

Exercice 23 (X 1998). Rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$$

Exercice 24 (Cen 2000). Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. On pose $S_p = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k$. On note R *resp* R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n\,x^n$ *resp* $\sum\limits_{n\geq 1} S_n\,x^n$. On suppose $R > 0$ et on note $f(x)$ et $g(x)$ les sommes respectives de ces séries dans leurs intervalles ouverts respectifs de convergence.

1. Comparer R et R_1 puis $f(x)$ à $g(x)$.
2. Donner un exemple où $R > 1$, $R_1 = R$ puis un autre avec $R > 1$, $R_1 = 1$.

Exercice 25 (X 97 : 5/2 seulement). $z \in \mathbf{C}$. Ensemble de définition de

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\, z^n}{\sqrt{n}+\cos n}\ ?$$

Exercice 26 (X 97 : 5/2 seulement). Soit $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ définie par :

$$a_n = a_{n-2}\left(\frac{(n-1)^2+\lambda-\frac{1}{4}}{4n^2}\right)+\mathrm{i}\,a_{n-1}\left(\frac{4(n-1)^2+2\lambda-1}{4n^2}\right)$$

où $0 < \lambda < \dfrac{1}{4}$ Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\geq 2(\sqrt{2}-1)$.

6.2 Calculs de sommes

Exercice 27 (Mines). Soit $u_n = a + \dfrac{n}{3} - \left[\dfrac{n}{3}\right]$. et $a > 0$. Rayon de convergence et somme de $\sum u_n z^n$.

Exercice 28 (Cen 2000). Convergence et somme de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$?

Exercice 29 (Cen 2000). Convergence et somme de $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^{n}}{3n+2}$?

Exercice 30 (Ccp 2000). Rayon et somme de $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$?

Exercice 31 (Ccp 2001). Existence et calcul de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\,2^n} \text{ ?}$$

Exercice 32 (Cen 2002). Calculer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n\,(2n+1)\,(2n+2)}$$

Exercice 33 (X 1997). Calculer $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$.

Exercice 34 (X 2000). Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+n^3}{(n+1)!}$.

Exercice 35 (CCP 1999). Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geq 0} \operatorname{ch}(na)x^n$?

Exercice 36 (Cen 1999). Convergence et somme de $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{3n!}$.

Exercice 37 (Cen 2002). Convergence et somme de :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+5}{n!}x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\cos(2nx)}{2^{2n}} \text{ ?}$$

Exercice 38 (Cen 1997, 2005, 2008). Rayon de convergence et somme de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n \text{ ?}$$

Exercice 39 (Mines). Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt$. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 C_{2n}^n}$$

de la manière la plus simple possible.

Exercice 40 (Centrale). Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$. Sans calculer l'intégrale, déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} u_n \, x^n$.

Déterminer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$.

Exercice 41 (X 98). -

1. Pour $n \geq 1$ on pose :

$$u_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(n-k)}$$

   Nature de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$?

2. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 42 (Mines). Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{-1, 1\}$ telle que $a_0 = 1$, et qu'en posant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

on ait :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \geq 0, \ |f^{(p)}(x)| \leq 1$$

Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 43 (X 2000). On définit, pour $z \in \mathbf{C}$:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Démontrer que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Exercice 44 (Cen 2000, 2003). Pour $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ on pose :

$$S_p(X) = \prod_{k=0}^{p-1} (X + 2k), \quad S_0 = 1,\ S_1 = X$$

et, pour $P \in \mathbf{R}[X]$ et $x \in \mathbf{R}$:

$$\phi(P)(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(-2n)}{n!}\, x^n$$

1. Montrer que la famille $(S_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Montrer que ϕ est bien définie. Calculer, avec Maple, $\phi(S_p)$ pour $p \leq 10$.
3. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbf{R}[X]$ et calculer ses valeurs propres.

6.3 Fonctions génératrices de suites récurrentes

Exercice 45 (Cen 2003). Soit (a_n) une suite réelle vérifiant, pour $n \geq 1$:

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = n(-1)^n$$

Expliciter a_n en fonction de a_0, a_1 et n.

Exercice 46 (Mines). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$.

1. Montrer, sans calculer les a_n que :

$$\exists (A, k) \in]0, +\infty[^2,\ |a_n| \leq Ak^n$$

2. Montrer que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ est > 0.
3. Calculer la somme de la série entière, en déduire les a_n.

Exercice 47 (X 97, Mines 98 et 2003, Cen 2002, 2003, 2005). Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \end{cases}$$

En considérant $\sum\limits_{n\geq 0} u_n x^n$ calculer u_n et en trouver un équivalent.

Exercice 48 (X 2003). Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 49 (Ccp 2000). Soit (a_n) la suite récurrente définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{n+b}{n+2}\, a_n$. Donner le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, x^n$ et une équation différentielle, que l'on résoudra, satisfaite par sa somme.

Exercice 50 (Cen 2002). Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, x^n$ où la suite (a_n) est définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}\, a_{n-1} \qquad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 51 (X 1997). Soit $a \in \mathbf{R}$, on considère la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n+1} \qquad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de terme général $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ converge.
2. Etudier la limite de (b_n) en fonction de a.
3. Utiliser la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ afin de connaître l'application :

$$a \mapsto \lim_{n\to\infty} b_n$$

Exercice 52 (Centrale 2003). Soit I_n le nombre d'applications s de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que $s \circ s = \mathrm{Id}$. On pose $I_0 = 1$.

1. Montrer que $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{I_n\, x^n}{n!}$ vaut au moins 1.
3. Déterminer la somme $f(x)$ de la série entière précédente puis son rayon.
4. Calculer, avec Maple, I_k pour $0 \leq k \leq 10$.

6.4 Comportements aux bords de l'ouvert de convergence

Exercice 53 (Cen 2003). -

1. Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose :

$$H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n$$

   Calculer H_0 et H_1, trouver une relation entre H_p et H_{p+1} et un équivalent de $H_p(x)$ en 1_-.
2. *(non posé au concours)* Étudier le cas où $p \in \mathbf{R}-$ en commençant par $p < 0$.

Exercice 54 (Ccp 2000, Cen 2002). Soit :

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin\left(t^2\right)\, \mathrm{d}t$$

Rayon de convergence et domaine de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n\, x^n$. Étude du comportement au bord du domaine de définition.

Exercice 55 (Cen 1997 et Ccp 1999). On considère la série entière de terme général $\dfrac{2n+1}{2n-1}\, x^{n-1}$ $(n \geq 1)$.

1. Rayon de convergence ?
2. Etude aux bornes.

3. Calcul de la somme.

Exercice 56 (Mines 2002 et 2003). Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$ avec :

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)\ ?$$

Étude du comportement de la somme aux bords de l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 57 (Cen 2003). Équivalent de la somme de $\sum_{n\geq 0} x^{(2^n)}$ aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence ?

Exercice 58 (Mines 1999). On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k.k!$$

1. Limite et équivalent de a_n ?
2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Quel est le domaine de définition de f ?
3. Comportement de f aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence ?

Exercice 59 (Ccp 1999). Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Rayon de convergence ? Intervalle de continuité de la somme de $\sum_{n\geq 0} \arctan(n^\alpha)\, x^n$?

Exercice 60 (Cen 97 et 2002). Soit (b_n) une suite de réels strictement positifs et (a_n) une suite réelle telle que $a_n \sim b_n$.

1. On suppose que la série entière de terme général $b_n x^n$ a un rayon infini. Quel est le rayon de $\sum a_n x^n$?
2. Soient f et g les sommes de ces deux séries. Prouver que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Équivalent de :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1! + 2! + \cdots + n!}$$
quand $x \to +\infty$?

Exercice 61 (Cen 2000). Soit (b_n) une suite de réels strictement positifs et (a_n) une suite réelle telle que $a_n = o\,(b_n)$.

1. On suppose que la série entière de terme général $b_n x^n$ a un rayon infini. Quel est le rayon de $\sum a_n x^n$?
2. Soient f et g les sommes de ces deux séries. Prouver que $f(x) = o\,(g(x))$ quand $x \to +\infty$.
3. Montrer que, si y est une solution de :

$$y''(x) - 2\,x\,y'(x) + a\,y(x) = 0 \quad a \in \mathbf{R}$$

alors, pour tout réel $\alpha > 1$, $y(x)\ \mathrm{e}^{-\alpha\,x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 62 (Cen 2000). Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(a+k)} \qquad \text{où } a > 0$$

1. Déterminer l'intervalle ouvert de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n\,x^n$ et montrer que sa somme f vérifie l'équation différentielle :

$$x\,y'(x) + (a-x)\,y(x) = a$$

2. On pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ t^{a-1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) \sim \Gamma(a+1)\ \mathrm{e}^{x}\ x^{-a}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 63 (TPE 1999). Rayon de convergence de :

$$1 + \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}\ ?$$

On note $f(x)$ la somme. Equivalent de $f(x)$ quand $n \to \infty$?

6.5 Développements en série entière

Exercice 64 (Cen 2009). Montrer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$ est développable en série entière autour de 0.

Exercice 65 (Ccp 2008).

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Domaine de définition ?
2. Limite en $+\infty$?
3. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
4. Si oui, f est-elle développable en série entière autours de 0 ?

Exercice 66 (X 2006). Développement en série entière de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$$

Exercice 67 (Ccp 98). Donner par plusieurs méthode le développement en série entière de $x \mapsto \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Exercice 68 (Cen 1998). Développement en série entière de $x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x)$ au voisinage de 0 ?

Exercice 69 (Ccp 2003). Développement en série entière de :

$$x \mapsto \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$$

au voisinage de 0

Exercice 70 (X 97 et Ccp 98). Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan^2 x$ est développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence de la série entière. Déterminer ce développement en série entière.

Exercice 71 (Mines 1998). Développement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2} + x}$.

Exercice 72 (TPE 2004). Développement en série entière de $x \mapsto \operatorname{Argsh}^2(x)$?

Exercice 73 (X 2002). Pour $(t, x) \in \mathbf{R}^2$, on pose :

$$f(t, x) = \mathrm{e}^{-tx - \frac{x^2}{2}}$$

1. Prouver l'existence d'une suite (H_n) de polynômes telle que pour tout t et tout x la série $\sum_{n\geq 0} H_n(t)\, x^n$ soit convergente de somme $f(t,x)$.
2. Prouver la formule :

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

3. Calculer, si $k \neq n$:

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(t)\, H_k(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$$

   Peut-on calculer la valeur de cette intégrale si $k = n$?

Exercice 74 (Mines 1999). Soit f définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1. Trouver un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.
2. On suppose que f admet un développement en série entière sur $]-R, R[$ $(R > 0)$. Justifier qu'on peut écrire, sur cet intervalle, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$.
3. Trouver alors une relation de récurrence entre les a_n.
4. Montrer qu'existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq \rho^n$.
5. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0, dont on majorera le rayon de convergence.

Exercice 75 (Cen 2000). Soient f et g les fonctions réelles définies par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$$

Domaine de définition de g ? Continuité et dérivabilité de g ? Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 76 (Cen 2000). Pour $x \in]-1, 1[$, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 (1+x)^t\, \mathrm{d}t$$

1. f est-elle développable en série entière ? Que dire du rayon de convergence.
2. En déduire le développement en série entière de $\phi : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$.

Exercice 77 (Cen 1999). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que, pour tout n et pour tout $x \in]-2, 2[$ on ait :

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{2^n}$$

Montrer que f est développable en série entière sur cet intervalle.

Exercice 78 (Ccp 2001). Soit $a \in]0, 1[$.

1. Déterminer le domaine de définition I de :

$$\sum_{n \geq 0} \sin(a^n x)$$

   On note $f(x)$ sa somme sur I.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et qu'il existe $M > 0$ tel que pour $k \geq 1$ et $x \in I$ on ait $|f^{(k)}(x)| \leq M$.
3. Montrer, par deux méthodes, que f est développable en série entière sur un intervalle à déterminer et préciser les coefficients de son développement.

Exercice 79 (Centrale). -

1. Domaine de convergence de :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n x^n$$

   Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
2. Equivalent de $f(x)$ quand $x \to 1$.
3. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trouver un équivalent de a_n.