RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

JPB

18 novembre 2007

Avant propos

La différence entre équivalence et similitude des matrices *ie* entre changements de bases indépendants dans l'espace de départ et d'arrivée pour une application linéaire et changement de bases pour un endomorphisme est une chose difficile à faire comprendre aux taupins. La première théorie, qui est celle de l'équivalence des matrices, n'utilise qu'un invariant : le rang ; sa mise en oeuvre algorithmique ne nécessite qu'une méthode : celle des opérations élémentaires. Inversement la théorie de la similitude des matrices est beaucoup plus puissante mais aussi beaucoup plus difficile. Ses invariants algébriques sont un peu délicats à décrire au niveau des classes préparatoires où l'on se borne simplement à souligner l'importance de l'algèbre des polynômes. En revanche nous avons lourdement insisté sur l'utilisation des outils géométriques que les étudiants doivent maîtriser pour, entre autres, fabriquer des bases adaptées à la mise en équation des problèmes.
Comme le sujet est intarissable et donne lieu à un certain nombre de débordements aux concours d'entrée aux grandes écoles en général et au concours d'entrée à l'École Polytechnique en particulier, j'ai rajouté le chapitre 4 de compléments en dehors des programmes de PC* comme la réduction simultanée ou le théorème de Cayley-Hamilton sans lesquels certains examinateurs manquent, sinon d'air, du moins d'inspiration. Les lecteurs noterons cepen-

dant que certains exercices comme le 50 ou le 51, s'ils illustrent une notion hors programme qui les éclaire, sont parfaitement résolubles avec les moyens du programme.

Table des matières

Tous les corps **K** considérés sont des sous corps de **C**. Tous les espaces vectoriels sont de dimension finie, sauf mention contraire. Les vecteurs sont quelquefois surmontés de flèches.

Chapitre 1

Principes et outils

1.1 Changement de base

Le cours de première année sur les changements de bases pour un vecteur et une application linéaire a été brièvement revu dans la chapitre consacré aux méthodes algorithmiques en algèbre linéaire. Il est conseillé d'y revenir.

1.2 L'équivalence des matrices

1.3 Le problème de la réduction des endomorphismes

1.3.1 Similitude des matrices

Définition 1. Deux matrices carrées A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont dites *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

On remarquera les propriétés suivantes :
- Si A est semblable à B, B est semblable à A
- Deux matrices semblables à une même troisième sont semblables entre elles.

Tout ceci est éclairé par le résultat fondamental suivant :

Proposition 1. *Soient A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et u l'endomorphisme du $\mathbf{K}$ espace vectoriel E représenté par A dans une base (e). Une autre matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à A si et seulement si il existe une autre base (e') de E telle que :*

$$\mathrm{mat}(u, (e')) = B$$

Si tel est le cas, il vient $B = P^{-1}AP$ où $P = P_{(e)}^{(e')} = P_{(e),(e')} = P_{(e)\to(e')}$ est la matrice de passage de (e) à (e') (mais il peut exister d'autres matrices P satisfaisant la même relation)

Exercice 1. Quels sont les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie qui ont la même matrice dans toutes les bases ?

Méthode générale pour la similitude des matrices

Pour prouver que deux matrices A et A' sont semblables, on introduit un espace vectoriel E, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et une base (e) de E tels que $A = \mathrm{mat}(u, (e))$ et on cherche une base (e') de E telle que $A' = \mathrm{mat}(u, (e'))$. **La recherche de (e') se fait en exploitant les propriétés géométriques de u.**

Réduction des endomorphismes et des matrices

C'est le problème (difficile) qui va nous occuper. Il s'agit, étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$ *resp* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, de trouver **une** base (e') de E dans laquelle la matrice B de u soit « la plus simple possible » *resp* une matrice B « très simple » semblable à M. Tout ceci étant motivé par le fait que les calculs (polynômiaux, rationnels et même fonctionnels) sur B doivent être « simples ». On disposera, pour cela, de deux sortes d'outils :

- Des outils géométriques : Essentiellement des sous-espaces de E qui « se comportent bien » vis-à-vis de u (noyau, image, sous-espaces propres, sous-espaces stables *etc.*).
- Des outils algébriques invariants par similitude des matrices : Trace, déterminant, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs *etc.*

Ces outils fournissent des informations généralement qualitatives sur la forme de la matrice réduite, informations qu'il faudra souvent combiner entre elles.

1.4 sous-espaces stables d'un endomorphisme

Rappel 1. *Un sous-espace F du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est dit* stable *par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $u(F) \subset F$. L'endomorphisme u_F de F défini par :*

$$x \in F \mapsto u(x) \in F$$

est appelé endomorphisme de F induit par u

Proposition 2 (Traduction en terme de bases). *Supposons le sous-espace $F \subset E$ de dimension finie et soit $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F. Alors F est stable par u si et seulement si $u(\overrightarrow{e_i}) \in F$ pour $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.*

Proposition 3 (Interprétation matricielle). *Soit $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, $1 \leq p < n$ un entier, $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$. F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si la matrice de u par rapport à (e) est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$. La matrice A est alors celle de u_F par relativement à la base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$.

Proposition 4. *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que E est somme directe de p sous-espaces :*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

Un endomorphisme u de E stabilise tous les E_j si et seulement si sa matrice, relativement à une base (e) adaptée à la décomposition ci dessus est diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_p \end{pmatrix}$$

Avec $U_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbf{K})$ et $n_j = \dim E_j$.

Exemple 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -\mathrm{I}_n$. Montrer que n est pair et que A est semblable à la matrice :*

$$B = \begin{pmatrix} U & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U \end{pmatrix}$$

avec $p = n/2$ et $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ Pour prouver la parité de n, on peut observer que $\det(A)^2 = (-1)^n$ *mais ce n'est pas nécessaire. On introduit l'endomorphisme u de $E = \mathbf{R}^n$ représenté par A dans la base canonique (e). On essaie de construire une base (e') par rapport à laquelle u a la matrice B. Pour cela, on essaie de dégager des* propriétés géométriques *de u à partir de la matrice B. On se rend compte que E doit être somme directe de p plans $F_1, \dots, F_p$ stables par u. Ce qu'on va essayer de démontrer.*
Le corps étant $\mathbf{R}$, on utilisera, sans le repréciser à chaque fois, le fait que :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

- *Montrons que, si $n > 0$, u admet au moins un plan stable.*
  Il suffit de prendre $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ et d'observer que $(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}))$ est libre. Envisageons une relation du type :

  $$\alpha \overrightarrow{x} + \beta u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

  En lui appliquant u, il vient :

  $$\alpha u(\overrightarrow{x}) - \beta \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \tag{1.2}$$

  En faisant α (1)$-\beta$ (2), il vient $\alpha = \beta = 0$. Le plan $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}))$ est stable par u puisque :

  $$u(\overrightarrow{x}) \in F \quad u((u(\overrightarrow{x}))) = -\overrightarrow{x} \in F$$

- *Montrons que si $1 \leq r \leq n/2$, il existe r plans $F_1, F_2, \dots, F_r$ stable par u et en somme directe.*
  C'est prouvé pour $r = 1$, supposons le établi pour $r < n/2$ et montrons le pour $r+1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe r plans $F_1, F_2, \dots, F_r$ stables par u et en somme directe. Le sous-espace :

  $$F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

est stable par u *et* $\dim F < \dim E$ *donc, il existe* $\overrightarrow{x} \in E$ *qui n'appartient pas à* F*. Soit* $F_{r+1} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}))$ *; montrons que* $F \cap F_{r+1} = \{\overrightarrow{0}\}$*. soit* $\overrightarrow{y} = \alpha\overrightarrow{x} + \beta u(\overrightarrow{x}) \in F \cap F_{r+1}$*,* $u(\overrightarrow{y}) = \alpha u(\overrightarrow{x}) - \beta\overrightarrow{x} \in F \cap F_{r+1}$*. Donc* $\alpha\overrightarrow{y} - \beta u(\overrightarrow{y}) = (\alpha^2 + \beta^2)\overrightarrow{x} \in F \cap F_{r+1}$*. Comme* $\overrightarrow{x} \notin F$*, il en résulte* $\alpha = \beta = 0$ *et* $\overrightarrow{y} = 0$*. Donc* F *et* F_{r+1} *sont en somme directe et le résultat voulu.*

– *Montrons l'existence d'une base de* E *où la matrice de* u *vaut* B*.*
  D'après ce qui précède, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$$

où les F_i *sont des plans stables par* u*. On choisit dans chaque* F_i *un vecteur non nul* $\overrightarrow{x_i}$*, la matrice de la restriction de* u *à* F_i *dans la base* $(e_i) = (\overrightarrow{x_i}, u(\overrightarrow{x_i}))$ *vaut* U *d'où le résultat annoncé en concaténant les bases* (e_i)*.*

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbf{K})$ telle que :

$$\mathrm{rg}(A) = 2n, \quad A^3 = 0$$

Prouver que $\mathrm{rg}(A^2) \geq n$ et que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Montrer qu'une matrice est nilpotente (*ie* telle qu'existe un entier naturel non nul p vérifiant $A^p = 0$) si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont nuls. (Raisonner par récurrence sur la dimension en considérant un élément non nul du noyau de l'endomorphisme associé que l'on complétera en une base de l'espace)

1.5 Quelques invariants de similitude

1.5.1 Trace

Rappel 2 (Trace d'une matrice). *On note* $\mathrm{Tr}(A)$ *la somme des éléments diagonaux d'une matrice* A*. L'application* $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *appelée* trace

Rappel 3 (Trace d'un endomorphisme). *La trace vérifie les propriétés suivantes :*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

On en déduit que la trace est un invariant de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*, c'est à dire que :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \quad \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$$

On en déduit que, si $u \in \mathcal{L}(E)$*, où* E *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie, le scalaire* $\mathrm{Tr}(A)$ *ne dépend pas de la base dans laquelle la matrice* A *représente l'endomorphisme* u *; on le note* $\mathrm{Tr}(u)$*. L'application* $u \mapsto \mathrm{Tr}(u)$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{L}(E)$ *appelée encore* trace *et qui vérifie :*

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \quad \mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$$

Exercice 4 (X 2003). Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est de la forme :

$$X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$$

Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 5 (X 2007). Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ f(AB) = f(BA)$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace. Que dire d'une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}),\ f(P^{-1}AP) = f(A)$$

Exercice 6 (Assez difficile). -

1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est de trace nulle si et seulement si elle est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ si et seulement si A peut s'écrire sous la forme $BC - CB$ où $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Montrer que la trace d'une matrice nilpotente est nulle. (Même méthode que dans l'exercice 3)
4. Quel est le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ engendré par l'ensemble des matrices nilpotentes ?

Exercice 7 (Matrices de Pauli). Si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on pose :

$$[A, B] = AB - BA$$

On note :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $[J, K]$, $[J, L]$, $[K, L]$.
2. Que dire de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = 0$?
3. Soient A, B, C trois matrices appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, non toutes trois nulles, telles que :

$$[A, B] = 2B \qquad [A, C] = -2C \qquad [B, C] = A$$

Prouver l'existence de $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = J \qquad P^{-1}BP = K \qquad P^{-1}CP = L$$

Proposition 5. *La trace d'un projecteur est égale à son rang.*

Remarque 1. À part l'exercice suivant proposé à un prix de concours général par Demazure dans les années 1990 à Ulm, et posé depuis aux Ccp (et même en agro) par ceux là mêmes qui en ont appris consciencieusement la solution faute de l'avoir trouvée tout seuls, l'intérêt de ce résultat est plutôt de l'ordre de l'analyse que de l'algèbre.

Exercice 8. Soient $p_1, \dots, p_r$ des projecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n tels que $p = \sum_{i=1}^{r} p_i$ est un projecteur. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\operatorname{Im} p = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Im} p_i$.
2. $p \circ p_i = p_i$ pour $1 \leq i \leq r$.
3. $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$

1.5.2 Polynômes d'un endomorphisme, polynômes annulateurs

Définition 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. $P = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n X^n$ un élément de $\mathbf{K}[X]$ (ce qui suppose que les a_n sont nuls à partir d'un certain rang). En convenant que $u^0 = \mathrm{I}_E$, on note :

$$P(u) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n u^n$$

Cette somme étant en réalité la somme d'un nombre fini de termes.
Il vient alors les propriétés suivantes :
- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X],\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u)$.
- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X],\ PQ(u) = P(u) \circ Q(u)$. En particulier, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.
- $1(u) = \mathrm{I}_E$, $X(u) = u$.
- $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont stables par u.

Les deux premières propriétés traduisent le fait que $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$

Polynômes d'une matrice

On les définit de la même manière avec des propriétés analogues que les lecteurs établiront. On observera que si A et B sont deux matrices semblables :

$$B = P^{-1} A P, \qquad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$$

alors $B^r = P^{-1} A^r P$ pour $r \in \mathbf{N}$ et même, **si** $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, pour $r \in \mathbf{Z}$.
Pour tout polynôme $\Pi \in \mathbf{K}[X]$.

$$\Pi(B) = P^{-1}\, \Pi(A)\, P$$

Bien entendu ces deux matrices représentent le même endomorphisme $\Pi(u)$ par rapport à deux bases différentes.

Polynômes annulateurs

Définition 3. Un *polynôme annulateur* d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est, par définition, un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, **non nul**, tel que $P(u) = 0$. Définition analogue pour une matrice.

On verra ultérieurement l'importance de tels polynômes. Pour l'instant donnons deux exemples :

Exemple 2. *Caractérisation géométrique de u si $P(u) = 0$ dans les cas suivants :*

$$P = X^m \quad (m \in \mathbf{N}^*) \qquad P = X^2 - X \qquad P = X^2 - 1$$

Exercice 9. Montrer que tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ admet au moins un polynôme annulateur

Exercice 10. $n = \dim(E)$. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si X^n est un polynôme annulateur de u.

Exemple 3 (Utilisation d'un polynôme annulateur). *On considère la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -1 & -8 & 1 \\ 21 & 3 & 17 & -2 \\ 7 & 0 & 8 & -1 \\ -14 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *On veut prouver que A est semblable à la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   En s'inspirant du résultat à démontrer, trouver un polynôme $\Pi \in \mathbf{R}[X]$ de degré 2 tel que $\Pi(A) = 0$. En déduire le résultat voulu.

2. *Déterminer A^{-1}.*

3. *Déterminer le reste R_n du polynôme X^n par Π. En déduire A^n.*
4. *Calculer A^n pour $n \in \mathbf{Z}$.*

Exercice 11. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites (u_n), complexes qui vérifient la relation de récurrence :

$$(R) \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+4} - 2\,u_{n+3} + 2\,u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n = 0$$

1. Montrer que c'est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Montrer que l'application $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
3. Trouver un polynôme annulateur de T. En déduire T^n en fonction de certaines puissances de T. Puis l'expression du terme général u_n d'une suite de $\mathcal{E}$ en fonction de u_0, u_1, u_2, u_3 et de l'entier n.
4. Etudier l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}$ des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence (R).

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, non nulle, telle que : $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 (Généralisation du précédent). -

1. Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ tels qu'existent $A, B \in \mathbf{K}[X]$ vérifiant :
$$AP + BQ = 1$$
Démontrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$\operatorname{Ker} PQ(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$$
Reprendre l'exercice précédent à la lumière de ce résultat.
2. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré $p \geq 1$ tel que : $P(\lambda) \neq 0$. Soit $\alpha \geq 1$ un entier.
   (a) Montrer que l'application de $\mathbf{K}_{\alpha-1}[X] \times \mathbf{K}_{p-1}[X]$ dans $\mathbf{K}_{\alpha+p-1}[X]$ définie par :
   $$(U, V) \mapsto U\,P + V\,(X - \lambda)^{\alpha}$$
   est un isomorphisme.

(b) En déduire que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E)^\alpha P = \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E)^\alpha \oplus \operatorname{Ker} P(u)$$

(c) Établir que, si les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont distincts et les entiers α_i non nuls, en posant :

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i\,\mathrm{I}_E)^{\alpha_i}$$

3. Applications : Etudier les suites récurrentes linéaires complexes (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_0\, u_n + a_1\, u_{n+1} + \cdots + a_{p-1}\, u_{n+p-1} + u_{n+p} = 0$$

Etudier, de même les solutions, p fois dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, de l'équation différentielle :

$$a_0\, y + a_1\, y' + \cdots + a_{p-1}\, y^{(p-1)} + y^{(p)} = 0$$

Chapitre 2

Diagonalisation des endomorphismes et des matrices

$\mathbf{K}$ est un sous corps de $\mathbf{C}$. Les espaces considérés ne sont pas obligatoirement de dimension finie.

2.1 Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

2.1.1 Valeurs propres

Définition 4 (Valeurs propres d'un endomorphisme). Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est appelé *valeur propre de u* s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. $u - \lambda \mathrm{I}_E$ n'est pas injectif.
2. $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E) \neq \{\overrightarrow{0}\}$.
3. Il existe un vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ **non nul** tel que :

$$u(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$

Définition 5 (Spectre d'un endomorphisme). Si u est un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E **non nécessairement de dimension**

finie, l'ensemble des scalaires λ tels que $u - \lambda \mathrm{I}_E$ n'est pas inversible s'appelle *le spectre* de u et se note $\mathrm{Sp}(u)$.

Remarque 2. 0 est une valeur propre de u si et seulement si u n'est pas injectif.

Proposition 6. En dimension finie seulement *le spectre de u coïncide avec l'ensemble des valeurs propres de u, à savoir :*

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbf{K}, \quad \exists \overrightarrow{x} \in E - \{\overrightarrow{0}\},\ u(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}\}$$

Donc, si E **est de dimension finie** n, *pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on a l'équivalence :*

$$\lambda \in \mathrm{Sp}\, u \Longleftrightarrow u - \lambda \mathrm{I}_E \notin \mathrm{GL}(E)$$

Soit encore :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}\, u \Longleftrightarrow \det(u - \lambda \mathrm{I}_E) = 0$$

Remarque 3. L'endomorphisme u de $\mathbf{R}[X]$ qui associe au polynôme P le polynôme Q défini par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ Q(x) = \int_0^x P(t)\, \mathrm{d}t$$

est non inversible car non surjectif (quelle est son image ?), en revanche il est injectif donc 0 n'est pas valeur propre de u.

Définition 6 (Valeurs propres d'une matrice carrée). Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est appelé *valeur propre dans* $\mathbf{K}$ *de la matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, si c'est une valeur propre de l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A, ce qui se traduit par l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. $A - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible.
2. $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.
3. Il existe une matrice unicolonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ **non nulle** telle que :

$$AX = \lambda X$$

L'ensemble des valeurs propres (dans $\mathbf{K}$) de A s'appelle *le spectre* de A et se note :

$$\mathrm{Sp}_K(A) = \{\lambda \in \mathbf{K}, \quad \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) - \{0\},\ AX = \lambda X\}$$

Remarque 4 *(Importance du corps).* Pour un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, une valeur propre est un élément de $\mathbf{K}$. En revanche, pour une matrice, c'est plus ambigu car elle peut peut être considérée comme étant à coefficients dans plusieurs corps différents, par exemple :

$$M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

N'a pas de valeur propre réelle car, pour tout réel λ :

$$\det(M - \lambda \mathrm{I}_2) = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

En revanche, elle possède deux valeurs propres complexes i et $-\mathrm{i}$ qui annulent le déterminant ci-dessus.
Il faut donc faire preuve de bon sens

Remarque 5 *(Spectre de la transposée).* Comme ${}^t\left(A - \lambda \mathrm{I}_n\right) = \left({}^tA - \lambda \mathrm{I}_n\right)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et que ces deux matrices on même rang il vient :

$$\mathrm{Sp}_K(A) = \mathrm{Sp}_K\left({}^tA\right)$$

Proposition 7. *Si u est un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, rapporté à une base (e) et $A = \mathrm{Mat}(u, (e))$, alors :*

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_K(A)$$

Démonstration. $\mathrm{Mat}(u - \lambda \mathrm{I}_E, (e)) = A - \lambda \mathrm{I}_n$ donc, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$u - \lambda \mathrm{I}_E \notin \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow A - \lambda \mathrm{I}_n \notin \mathrm{GL}_n\left(\mathbf{K}\right)$$

$\square$

Calcul

La méthode la plus générale, en dehors de toute autre étude ou considération géométrique *cf infra* consiste à calculer $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$, ce qui se fait généralement par opérations élémentaires, et à regarder ses valeurs d'annulation. Voici un exemple :

```
A:=matrix(4,4,[1,-1,0,1, 0,2,-1,0,1,3,1,1,-1,1,2,1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
id:=diag(1$4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
M:=A-m*id;evalm(M);
```

$$\begin{bmatrix} 1-m & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-m & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1-m & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1-m \end{bmatrix}$$

Mettons en place les opérations élémentaires.
Afin de n'avoir pas de polynôme en m au dénominateur, on pivote avec un élément constant en position $1, 1$:

```
M1:=swaprow(M,1,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1-m & 1 \\ 0 & 2-m & -1 & 0 \\ 1-m & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1-m \end{bmatrix}$$

```
M2:=pivot(M1,1,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1-m & 1 \\ 0 & 2-m & -1 & 0 \\ 0 & -4+3\,m & -\left(-1+m\right)^2 & m \\ 0 & 4 & 3-m & 2-m \end{bmatrix}$$

```
M3:=swaprow(M2,2,4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1-m & 1 \\ 0 & 4 & 3-m & 2-m \\ 0 & -4+3\,m & -\left(-1+m\right)^2 & m \\ 0 & 2-m & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
M4:=pivot(M3,2,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/4-\frac{m}{4} & -1/2+\frac{3\,m}{4} \\ 0 & 4 & 3-m & 2-m \\ 0 & 0 & 2-\frac{5\,m}{4}-\frac{m^2}{4} & 2-\frac{3\,m}{2}+\frac{3\,m^2}{4} \\ 0 & 0 & -5/2+\frac{5\,m}{4}-\frac{m^2}{4} & -\frac{(-2+m)^2}{4} \end{bmatrix}$$

Comme on veut pivoter avec l'élément en position $3,3$, on abaisse le degré des polynômes :

```
M5:=addrow(M4,3,4,-1);
```

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5/4-\frac{m}{4} & -1/2+\frac{3\,m}{4} \\ 0 & 4 & 3-m & 2-m \\ 0 & 0 & 2-\frac{5\,m}{4}-\frac{m^2}{4} & 2-\frac{3\,m}{2}+\frac{3\,m^2}{4} \\ 0 & 0 & -9/2+\frac{5\,m}{2} & -2+\frac{3\,m}{2}-\frac{3\,m^2}{4}-\frac{(-2+m)^2}{4} \end{array}\right]$$

On continue d'abaisser le degré *via* une division euclidienne :

```
q:=quo(M5[3,3],M5[4,3],m);
```

$$-\frac{m}{10}-\frac{17}{25}$$

```
addrow(M5,4,3,-q);M6:=map(simplify,");
```

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5/4-\frac{m}{4} & -1/2+\frac{3\,m}{4} \\ 0 & 4 & 3-m & 2-m \\ 0 & 0 & -\frac{53}{50} & -\frac{m}{10}+\frac{8\,m^2}{25}-\frac{m^3}{10}-1/25 \\ 0 & 0 & -9/2+\frac{5\,m}{2} & -3+\frac{5\,m}{2}-m^2 \end{array}\right]$$

```
M7:=pivot(M6,3,3);
```

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{93\,m}{106}-\frac{75\,m^2}{212}+\frac{9\,m^3}{212}-\frac{24}{53}+\frac{5\,m^4}{212} \\ 0 & 4 & 0 & -\frac{66\,m}{53}+m^2-\frac{31\,m^3}{53}+\frac{100}{53}+\frac{5\,m^4}{53} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{50} & -\frac{m}{10}+\frac{8\,m^2}{25}-\frac{m^3}{10}-1/25 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{150\,m}{53}-\frac{275\,m^2}{106}+\frac{125\,m^3}{106}-\frac{150}{53}-\frac{25\,m^4}{106} \end{array}\right]$$

$A-m\mathrm{I}_4$ est donc non inversible si et seulement si m est racine du polynôme :

```
-106/25*M7[4,4];sort(",m);
```

$$m^4-5\,m^3+11\,m^2-12\,m+12$$

Vérification avec la commande Maple *eigenvals* qui donne directement les valeurs propres :

```
eigenvals(A);
```

$$RootOf(-12\_Z + 11\_Z^2 - 5\_Z^3 + \_Z^4 + 12)$$

Remarque 6. On n'a pas particulièrement cherché à calculer $\det(A - m\mathrm{I}_4)$ mais c'est le calcul qu'il aurait fallu mener pour l'obtenir. Cette méthode a l'avantage de donner aussi les vecteurs propres *cf infra*.

Proposition 8 (Valeurs propres des matrices triangulaires). *Les valeurs propres d'une matrices triangulaire ou diagonale sont ses éléments diagonaux.*

Démonstration. Si $T = (t_{ij})$ est une telle matrice, la matrice $T - \lambda\mathrm{I}_n$ est triangulaire d'éléments diagonaux $t_{ii} - \lambda$; elle est donc singulière si et seulement si l'un de ces scalaires est nul. □

Exercice 14. Que dire des valeurs propres d'une matrice triangulaire par blocs dont les blocs diagonaux A_{ii} sont des matrices carrées ?

2.1.2 Sous-espaces propres

Définitions et propriétés

Définition 7. On appelle *sous-espace propre associé à la valeur propre* λ de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, le sous-espace, noté $\mathcal{V}_u(\lambda)$ *[ou* $\mathcal{V}(\lambda)$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté]*, défini par :

$$\mathcal{V}_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{I}_E) = \{\overrightarrow{x} \in E,\ u(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}\}$$

$\mathcal{V}(\lambda) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ d'aprés la définition d'une valeur propre. On définira également le sous-espace propre associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ comme étant le sous-espace propre, associé à la valeur propre λ, de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Rappel 4. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ *des scalaires* **distincts**. *alors :*

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{I}_E) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{I}_E)$$

les λ_i ne sont pas nécessairement des valeurs propres de u c'est-à-dire que certains de ces noyaux peuvent être réduits à $\{\overrightarrow{0}\}$.

Démonstration. déjà démontré antérieurement. □

Corollaire 1. *Si* $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ *sont des valeurs propres* **distinctes** *de* $u \in \mathcal{L}(E)$*, les sous-espaces* $\mathcal{V}(\lambda_i)$ *sont en somme directe. En particulier, si* E *est de dimension finie* n *:*

$$n \geq \dim \bigoplus_{i=1}^{p} V(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathcal{V}(\lambda_i) \geq p$$

Un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie n **possède donc au plus** n **valeurs propres distinctes.**

Calcul

On va étudier des méthodes de calcul simultané des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'un espace de dimension finie, dont on connait la matrice dans une base.

Exemple 4. *Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme* f *du* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* E *de dimension* 4 *dont la matrice* A *dans une base* (e) *de* E *est :*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On va étudier une méthode qui fournit simultanément les valeurs propres et les sous espaces propres.

```
M:=evalm(A-m*id);
```

$$\begin{bmatrix} -1-m & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2-m & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2-m & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -m \end{bmatrix}$$

```
M1:=swaprow(M,1,2);M2:=pivot(M1,1,1);
```

$$M1 = \begin{bmatrix} -2 & 2-m & 1 & -3 \\ -1-m & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2-m & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -m \end{bmatrix}$$

$$M2 = \begin{bmatrix} -2 & 2-m & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{m}{2}+\frac{m^2}{2} & -1/2-\frac{m}{2} & 1/2+\frac{3\,m}{2} \\ 0 & 1-m & 3-m & -6 \\ 0 & 1-m & 2 & -3-m \end{bmatrix}$$

```
M3:=swaprow(M2,2,3);M4:=addrow(M3,2,3,m/2);M5:=addrow(M4,2,4,-1);
```

aprés simplification, on obtient :

$$M5 = \begin{bmatrix} -2 & 2-m & 1 & -3 \\ 0 & 1-m & 3-m & -6 \\ 0 & 0 & m-\frac{m^2}{2}-1/2 & -\frac{3\,m}{2}+1/2 \\ 0 & 0 & -1+m & 3-m \end{bmatrix}$$

On abaisse encore le degré pour pivoter :

```
q:=quo(M5[3,3],M5[4,3],m);M6:=map (simplify,addrow(M5,4,3,-q));
M7:=swaprow(M6,3,4);
```

$$M6 = \begin{bmatrix} -2 & 2-m & 1 & -3 \\ 0 & 1-m & 3-m & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{m}{2}-\frac{m^2}{2} \\ 0 & 0 & -1+m & 3-m \end{bmatrix}$$

$$M7 = \begin{bmatrix} -2 & 2-m & 1 & -3 \\ 0 & 1-m & 3-m & -6 \\ 0 & 0 & -1+m & 3-m \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{m}{2}-\frac{m^2}{2} \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ dont la matrice, relativement à (e), est $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ appartient donc à $\mathrm{Ker}(f - m\mathrm{I}_E)$ si et seulement si $M_7X = 0$. Les valeurs propres de f sont donc 1 et les racines complexes du polynôme $-1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{2}$. *Étudions les sous-espaces propres associés.*

i) Valeur propre $m = 1$: *On substitue $m = 1$ dans M_7 puis on continue les opérations élémentaires jusqu'à obtenir une base du sous-espace propre.*

```
D1:=subs(m=1,evalm(M7));
```

$$D1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
D2:=swapcol(D1,2,3);D3:=swapcol(D2,3,4);
```

Ces deux manipulations sur les colonnes s'interprètent comme un changement de base. Le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ dont la matrice, relativement à (e) est :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Possède, dans la nouvelle base (e'), les coordonnées exprimées par la matrice :

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$D3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
D4:=addrow(D3,3,4,1/2);
```

$$D4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc :

$$\mathcal{V}(1) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_2})$$

ii) Valeurs propres $m = a$ **avec** $-1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ **:** *on traite simultanément ces deux valeurs propres via :*

```
alias(a=RootOf(m^2-m+2,m));D1:=subs(m=a,evalm(M7));
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 2-a & 1 & -3 \\ 0 & 1-a & 3-a & -6 \\ 0 & 0 & -1+a & 3-a \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2} \end{bmatrix}$$

```
map(evala,evalm(D1));
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 2-a & 1 & -3 \\ 0 & 1-a & 3-a & -6 \\ 0 & 0 & -1+a & 3-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les lecteurs calculeront une base de $\mathcal{V}(a)$ dont les coordonnées mises sous la forme $r + s\,a$, r, $s \in \mathbf{Q}$.

Exercice 15 (Ccp 98). Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de la matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Vecteurs propres

Rappel 5 (Vecteurs propres d'un endomorphisme). *On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1. **Il est non nul** *et la droite* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x})$ *est stable par u.*
2. **Il est non nul** *et il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$. Le scalaire λ est alors unique, c'est une valeur propre de u appelée la valeur propre de u associée à $\overrightarrow{x}$.*
3. **Il est non nul** *et il existe une valeur propre λ de u telle que $\overrightarrow{x} \in \mathcal{V}(\lambda)$. Il en découle que tout vecteur* **non nul** *d'un sous-espace propre de u en est un vecteur propre.*

Remarque 7. A un vecteur propre de u correspond une valeur propre unique, en revanche à une valeur propre λ de u correspondent une infinité de vecteurs propres qui sont les éléments de $\mathcal{V}(\lambda) - \{\overrightarrow{0}\}$; néanmoins, un tel vecteur sera appelé *un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Rappel 6. *un système de p vecteurs propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres* **distinctes** *est libre.*

Démonstration. Soit $(x) = (\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$ un système de p vecteurs propres de u respectivement associés au p valeurs propres **distinctes** $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Envisageons une relation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0}$$

Le vecteur $\alpha_i \overrightarrow{x_i}$ appartient au sous-espace propre $\mathcal{V}(\lambda_i)$; or les sous-espaces $\mathcal{V}(\lambda_i)$ sont en somme directe, il s'ensuit que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \alpha_i \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0}$$

Or $\overrightarrow{x_i} \neq \overrightarrow{0}$ puisque c'est un vecteur propre de u, d'où la nullité de tous les λ_i. □

Exercice 16 (Application). I est un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point. Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ des complexes distincts. Démontrer que le système de fonctions $(f) = (f_1, \ldots, f_p)$ avec :

$$\forall x \in I,\ f_i(x) = \exp(\lambda_i x)$$

Est un système libre du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbf{C})$. Même question avec le système $(u^1, \ldots, u^p)$ de suites complexes définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n^i = \lambda_i^n$$

de l'espace $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Application : Soit $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p$ un polynôme complexe amettant p racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Trouver la forme de la solution générale de l'équation différentielle :

$$y^{(p)} + a_1\, y^{(p-1)} + \cdots + a_p\, y = 0$$

Même question avec la récurrence linéaire :

$$u_{n+1} + a_1\, u_{n+p-1} + \cdots + a_p\, u_n = 0$$

On va étudier un exemple, important en analyse, de recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'un espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 5 (Exemple en dimension infinie). *On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ et F le sous ensemble de $\mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R})$ défini par :*

$$F = \{z \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R}), \quad y'(0) = y(1) - y'(1) = 0\}$$

On note k la fonction de deux variables (x, t) définie sur $[0,1]^2$ par :

$$\mathrm{k}(x, t) = \max(x, t)$$

Pour $x \in [0,1]$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{k}(x, t)$ est continue sur $[0,1]$; on peut donc associer à une fonction $y \in E$ la fonction, notée $\mathrm{K}y$, définie sur $[0,1]$ par :

$$\mathrm{K}y(x) = \int_0^1 \mathrm{k}(x, t) y(t)\, \mathrm{d}t$$

On a alors les propriétés suivantes :

1. *F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R})$.*

2. $\mathrm{K} \in \mathcal{L}(E)$.
3. *Si* $y \in E$, $z = \mathrm{K}y$ *appartient à* F *et* $z" = y$.
4. K *est un isomorphisme de* E *sur* F *et son isomorphisme réciproque est donné par :*
$$z \mapsto z"$$
5. K *admet une infinité* $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de valeurs propres strictement négatives :*
$$\lambda_n = -\frac{1}{\omega_n^2}$$
Où ω_n *est l'unique racine de l'équation :*
$$\omega \sin \omega + \cos \omega = 0 \tag{2.1}$$
appartenant à l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$. *Le sous-espace propre* $\mathcal{V}(\lambda_n)$ *est la droite vectorielle engendrée par la fonction :*
$$y_n : x \mapsto \cos(\omega_n x)$$
6. K *admet une valeur propre strictement positive* λ_∞ *:*
$$\lambda_\infty = \frac{1}{\omega_\infty^2}$$
Où ω_∞ *est l'unique racine strictement positive de l'équation :*
$$\omega \,\mathrm{sh}\, \omega - \mathrm{ch}\, \omega = 0 \tag{2.2}$$
Le sous-espace propre $\mathcal{V}(\lambda_\infty)$ *est la droite vectorielle engendrée par la fonction :*
$$y_\infty : x \mapsto \mathrm{ch}(\omega_n x)$$

Définition 8 (Vecteurs propres d'une matrice). Un vecteur propre d'une matrice carrée A est, par définition, un vecteur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à A. Autrement dit, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ de A si et seulement si :
$$X \neq 0 \quad \text{et} \quad AX = \lambda X$$

2.2 Diagonalisation en dimension finie

Dans toute la suite, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

2.2.1 Endomorphismes diagonalisables

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a vu précédemment que $\mathrm{Sp}(u)$ est un ensemble fini, éventuellement vide, et que :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda)$$

On convient que cette somme directe vaut $\{\overrightarrow{0}\}$ si $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$.

Définition 9. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une base (f) de E constituée de vecteurs propres de u.
2. $$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda) = E$$
3. $$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathcal{V}(\lambda) = \dim E$$

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que u est diagonalisable.

Démonstration. Prouvons que $\underline{1 \Rightarrow 2}$ Soit $(f) = \left(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u. Il vient, pour $1 \leq j \leq n = \dim E$:

$$\exists \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \overrightarrow{f_j} \in \mathcal{V}(\lambda) \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda)$$

Donc le sous-espace $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda)$ contient tous les vecteurs de (f) qui est une base de E et :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda) = E$$

Prouvons que $\underline{2 \Rightarrow 3}$ C'est clair puisque :

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathcal{V}(\lambda)$$

Prouvons que <u>$3 \Rightarrow 1$</u> Si 2 est vérifiée alors :

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda) = \dim E$$

donc :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{V}(\lambda) = E$$

Une base adaptée à cette décomposition en somme directe est une base de E constituée de vecteurs propres de u. □

Théorème 1 (Un cas particulier important). *Soit $n = \dim E$. Si u admet n valeurs propres* **distinctes***, il est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.*

Démonstration. Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ces valeurs propres. $\dim \mathcal{V}(\lambda_i) \leq 1$ donc :

$$n \geq \dim \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \dim \mathcal{V}(\lambda_i) \geq n$$

u est donc diagonalisable. Aucun des entiers $\dim \mathcal{V}(\lambda_i)$ ne peut être strictement supérieur à 1 car la somme des dimension dépasserait strictement n donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \dim \mathcal{V}(\lambda_i) = 1$$

□

Remarque 8. L'exemple des homothéties en dimension $n \geq 2$ prouve que les sous-espaces propres ne sont pas nécessairement des droites. Les lecteurs fabriqueront eux-même un endomorphisme diagonalisable admettant exactement p valeurs propres distinctes avec $1 \leq p \leq n$.

Exemple 6. *L'endomorphisme u de $E = \mathbf{R}_n[X]$ défini par :*

$$P \mapsto (X^2 - 1)P"$$

est diagonalisable.

Démonstration. $\deg(X^2-1)P" \leq \deg P$ donc u est bien un endomorphisme de E. La matrice, de taille $n+1$, de u dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de E est triangulaire supérieure de diagonale :

$$(0, 0, 2, 6, \dots, k(k-1), \dots, n(n-1))$$

Il y a donc n valeurs propres distinctes de u :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \{k(k-1),\ 2 \leq k \leq n\}$$

Or $\mathcal{V}(0) = \mathbf{R}_1[X]$ de dimension 2. Pour $2 \leq k \leq n$, $\dim \mathcal{V}(k(k-1)) \geq 1$. Donc :

$$\dim \mathcal{V}(0) + \sum_{k=2}^{n} \dim \mathcal{V}(k(k-1)) \geq n+1$$

Cette somme, statutairement inférieure à $n+1$ est donc égale à $n+1$ et u est diagonalisable. De plus :

$$\sum_{k=2}^{n} \dim \mathcal{V}(k(k-1)) = n-1$$

donc ces dimensions valent toutes 1. □

Exercice 17 (X 99). L'endomorphisme de $\mathbf{R}_{2n}[X]$ défini par :

$$P \mapsto X(X+1)\,P' - 2n\,X\,P$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 18 (X99). Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $v \in \mathcal{L}(E)$. On note Γ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $u \mapsto u \circ v$. Etudier le lien entre les caractères diagonalisables de v et de Γ.

Exercice 19. Prouver que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable.

2.2.2 Matrices diagonalisables

Lemme 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, la matrice de u dans une base (f) de E est diagonale si et seulement si (f) est constituée de vecteurs propres de u.*

Démonstration. Evident. □

Définition 10. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite *diagonalisable* sur $\mathbf{K}$ si elle est $\mathbf{K}$-semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Proposition 9. *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base (e), $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}(u,(e))$. Pour que u soit diagonalisable il faut et il suffit que A le soit.*

Démonstration. Si u est diagonalisable, E admet une base (f) constituée de vecteurs propres de u. En notant $P = P_{(e)}^{(f)}$ la matrice de passage de (e) à (f), P est inversible et :

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{Mat}\,(u,(f))$$

qui est diagonale.
Réciproquement, si A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{K})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. On introduit alors le système (f) de vecteurs de E dont P est la matrice de présentation relativement à E. Il vient alors $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,P = n$ donc (f) est une base et $P = P_{(e)}^{(f)}$, de plus :

$$\mathrm{Mat}(u,(f)) = P^{-1}AP = D$$

Donc (f) est une base de E constituée de vecteurs propres de u. □

Corollaire 2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$, canoniquement associé à A, l'est. En particulier, une condition* **suffisante** *de diagonalisation est que A admette n valeurs propres distinctes.*

Remarque 9. Contrairement aux endomorphismes, le caractère diagonalisable d'une matrice dépend, comme ses valeurs propres, du corps sur lequel on la considère. Pour $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Elle est donc diagonalisable en tant que matrice à coefficients complexes ; en revanche elle ne l'est pas en tant que matrice à coefficients réels. (On rappelle qu'elle représente la rotation d'angle θ dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne et de son orientation canonique).

Exemple 7 (Exemple de diagonalisation). *Cherchons à diagonaliser sur* $\mathbf{R}$ *la matrice :*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Maple donne directement les valeurs propres de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$*, canoniquement associé à* A *et, pour chacune d'elle, une base du sous-espace propre correspondant. On trouve (Les lecteurs sont priés de faire le calcul à la main avec la méthode décrite plus haut) :*

- 1 *avec comme sous-espace propre* $\mathrm{Vect}([1,1,1])$.
- $a = \mathrm{RootOf}(\_Z^2 + 2\_Z - 6)$ *avec comme sous-espace propre* $\mathrm{Vect}([-a/3-2/3, 1, a/3-1/3])$.

Il y a donc trois valeurs propres réelles distinctes puisque le polynôme $X^2 + 2X - 6$ *possède deux racines réelles distinctes* a *et* b *avec* $a+b=-2$*. On introduit alors la matrice* P *de passage entre la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *et une base de vecteurs propres de* u *:*

```
alias (a=RootOf(x^2 + 2*x-6,x);b:=-2-a;
P:=matrix(3,3,[1,-a/3-2/3,-b/3-2/3,1,1,1,1,a/3-1/3,b/3-1/3]);
```

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{3} - 2/3 & \frac{a}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{a}{3} - 1/3 & -\frac{a}{3} - 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $P^{-1}AP$ *doit être la matrice de* u *dans la base des vecteurs propres ci-dessus, c'est-à-dire :*

$$D = \mathrm{Diag}(1, a, b)$$

Vérifions, pour le plaisir :

```
D:=evalm(P^(-1)&*A&*P)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{14} + \frac{6\,a}{7} + 3/7 & \frac{a^2}{14} + \frac{a}{7} - 3/7 \\ 0 & \frac{a^2}{14} + \frac{a}{7} - 3/7 & -\frac{a^2}{14} - \frac{8\,a}{7} - \frac{11}{7} \end{bmatrix}$$

```
map (evala, D)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 \end{bmatrix}$$

Satisfaisant, non ?
Enfin, pour les amateurs de radicaux et de discriminant (pouah), signalons qu'on peut prendre :

$$a = 1 + \sqrt{7} \qquad b = 1 - \sqrt{7}$$

Exemple 8. *Diagonalisation des matrices tridiagonales complexes de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

2.2.3 Exemples de diagonalisation avec un "gros" sous-espace propre

On traitera en cours les exemples suivants :

Exemple 9. *Diagonalisation des matrices de rang* 1 *ie de la forme :*

$$U^tV \quad \text{avec} \quad U,\ V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \ \text{ non nulles}$$

Exemple 10. *Diagonalisation (sur* $\mathbf{R}$*) de la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 \quad a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

2.3 Polynômes annulateurs

Lemme 2. *Soit u un endomorphisme du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et $P \in \mathbf{K}[X]$. Si $\overrightarrow{x} \in E$ vérifie $u(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$ alors :*

$$P(u)(\overrightarrow{x}) = P(\lambda)\,\overrightarrow{x}$$

Proposition 10. *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme annulant l'endomorphisme u* (resp la matrice A)*. Alors toute valeur propre de u* (resp A) *est racine de P.*

Exercice 20. En utilisant des polynômes annulateurs, diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = (a_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n} \qquad B = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec } a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$$

Lemme 3. *Soit u un endomorphisme* **diagonalisable** *d'un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel E dont les valeurs propres* **distinctes** *sont notées :*

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$$

Alors le polynôme :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$$

annule u. Résultat analogue avec les matrices.

Théorème 2. *Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé sur* $\mathbf{K}$ *dont les racines sont simples.*

Exemple 11. *Projecteurs, symétries.*

Exercice 21. Reprendre les exercices ci dessus à la lumière de ce résultat.

2.3.1 Utilisation de sous-espaces stables

Tout repose sur le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. F un sous espace stable par u. L'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable .*

Exercice 22. Soit A une matrice complexe telle que A^2 soit diagonalisable. A est-t-elle diagonalisable ?

Exercice 23. A quelles conditions les matrices qui suivent sont-t-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a+b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 24 (X). À quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice B définie par blocs par :

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 25 (Centrale 2004). $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

Étudier les valeurs propres de B en fonction de celles de A. Étudier le lien entre la diagonalisabilité de A et celle de B.

Exercice 26. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les sous-espaces stables par u *[Indication : On pourra chercher les plans stables sous forme cartésienne et introduire la transposée de A]*. Montrer que tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable. Reprendre la même étude dans $\mathbf{C}^3$.

2.4 Polynôme caractéristique

Définition 11 (Polynôme caractéristique d'une matrice). Soit :
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de colonnes $(\overrightarrow{C_1}, \dots, \overrightarrow{C_n})$.
- $(\epsilon) = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Si I est une partie de $\{1, 2, \dots, n\}$ et si $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose :

$$\overrightarrow{C_{I,i}} = \begin{cases} \overrightarrow{\epsilon_i} & \text{si } i \in I \\ \overrightarrow{C_i} & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle *polynôme caractéristique de* A, le polynôme de $\mathbf{K}[X]$ définit par :

$$\boxed{\chi_A(X) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\})} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} \det_{(\epsilon)} \left(\overrightarrow{C_{I,1}}, \overrightarrow{C_{I,2}}, \dots, \overrightarrow{C_{I,n}}\right) X^{\mathrm{Card}(I)}}$$

Comme $\mathbf{K}$ est infini c'est le seul polynôme de $\mathbf{K}[X]$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$$

C'est un invariant de similitude.

Définition 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un et un seul polynôme de $\mathbf{K}[X]$, noté χ_u, tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \mathrm{I}_E)$$

On l'appelle *polynôme caractéristique de* u.
Si A est la matrice de u dans une base de E on a $\chi_u = \chi_A$.

Proposition 11. *Les valeurs propres de* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *dans* $\mathbf{K}$ (resp de $u \in \mathcal{L}(E)$) *sont celles des racines de* χ_A (resp χ_u) *qui appartiennent à* $\mathbf{K}$.
On appelle multiplicité *d'une telle valeur propre* λ*, son ordre de multiplicité comme racine de* χ_A (resp χ_u) *; on le note généralement* $m(\lambda)$*. En particulier, si* χ_u *est scindé sur* $\mathbf{K}$ par exemple, si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$*,* u *admet* n *valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités.*

Proposition 12. *Notons* $\mathcal{P}_k$ *l'ensemble des parties* I *de* $\{1, 2, \dots, n\}$ *de cardinal* k*. Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*. Le coefficient de* χ_A *du monôme en* X^k *est :*

$$(-1)^k \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \det_{(\epsilon)} \left(\overrightarrow{C_{I,1}}, \overrightarrow{C_{I,2}}, \dots, \overrightarrow{C_{I,n}}\right)$$

En particulier, si $n = 2$ *:*

$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)\, X + \det(A)$$

Corollaire 3. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *où* $\dim E = n$*. Alors :*

$$\chi_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(u) X^{n-1} + \cdots + \det(u)$$

En particulier, si χ_u *scindé sur* $\mathbf{K}$ *et* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *un système de racines de* χ_u

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i \qquad \det(u) = \prod_{1 \le i \le n} \lambda_i$$

> *Remarque* 10. Le polynôme caractéristique est utile lorsqu'on a besoin d'un argument théorique d'existence d'une valeur propre (et donc d'un vecteur propre associé). En particulier, si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, tout endomorphisme de E possède des valeurs propres et des vecteurs propres ; c'est faux si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Théorème 4. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*.*

- *Si* F *est un sous-espace stable par* u *et* v *l'endomorphisme de* F *induit par* u *alors* $\chi_v | \chi_u$*.*
- *En particulier, si* $F = \mathcal{V}(\lambda)$ *est le sous-espace espace propre associé à une valeur propre* λ*, alors :*

$$(X - \lambda)^{\dim((\mathcal{V}(\lambda))} | \chi_u$$

il s'ensuit que :

$$\dim(\mathcal{V}(\lambda)) \le m(\lambda)$$

Théorème 5. *Pour que* $u \in \mathcal{L}(E)$ *soit diagonalisable, il est nécessaire et suffisant que :*

- χ_u *soit scindé sur* $\mathbf{K}$*.*
- *Pour toute valeur propre* λ *de* u*,* $\dim(\mathcal{V}(\lambda)) = m(\lambda)$*.*

Exercice 27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont $\lambda \in \mathbf{K}$ est la seule valeur propre dans $\mathbf{K}$. Que dire de χ_A dans les deux cas suivants :

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} \qquad \mathbf{K} = \mathbf{R} \quad ?$$

Exercice 28. -

1. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, supposée nilpotente, vaut $(-1)^n X^n$.
2. Le corps $\mathbf{K}$ est quelconque. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique vaut $(-1)^n X^n$ *[on pourra, pour la partie directe comme pour la réciproque, raisonner par récurrence sur n].*

Exercice 29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, telle que $A^3 + A = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} A$ est pair. Trouver des formes réduites réelles et complexes de A.

Exercice 30. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de u. Prouver l'équivalence des propriétés suivantes :
 i) $E = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E) \oplus \operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{I}_E)$.
 ii) $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E)^2$.
 iii) $\mathcal{V}(\lambda)$ admet un supplémentaire stable par u.
 iv) $\dim \mathcal{V}(\lambda) = m(\lambda)$.
Montrer que, dans ces conditions, le seul supplémentaire de $\mathcal{V}(\lambda)$ stable par u est $\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{I}_E)$.

Exercice 31. Diagonalisabilité d'une matrice triangulaire, base de projecteurs, décomposition en symétries.

Exercice 32. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec :

$$\begin{cases} a_{ij} = a & \text{si } i+j \text{ pair} \\ a_{ij} = b & \text{si } i+j \text{ impair} \end{cases}$$

et $a \neq b$.
Calculer A^p.

2.4.1 Trigonalisation des endomorphismes et des matrices

Rappel 7 (Caractérisation géométrique d'une base de trigonalisation). *La matrice T d'un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n relativement à une base $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est triangulaire supérieure si et seulement si :*

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ u(\overrightarrow{e_j}) \in \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_j})$$

Théorème 6. *soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$. Il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de E est triangulaire supérieure.*

La preuve de ce résultat est hors programme. Nous donnons ci dessous la preuve de son corollaire matriciel.

Théorème 7 (Démonstration hors programme). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. En particulier toute matrice carrée complexe est trigonalisable.*

Démonstration. Par récurrence sur la taille n de la matrice. C'est évident si $n = 1$; supposons le vrai pour $n-1 \geq 1$ et prouvons le pour n. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et a l'endomorphisme de $E = \mathbf{K}^n$ qui lui est canoniquement associé. Comme $\chi_a = \chi_A$ est scindé sur $\mathbf{K}$ et de degré $n \geq 2$, il possède au moins une racine $\lambda_1 \in \mathbf{K}$ qui est une valeur propre de a. Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur propre associé. Notons H un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ dans E et soit π le projecteur d'image H et de noyau $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ et $(h) = (\overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{h_3}, \ldots, \overrightarrow{h_n})$ une base de H. La matrice de a relativement à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{h_2}, \ldots, \overrightarrow{h_n})$ de E est de la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

où $C = \mathrm{Mat}\left(\pi \circ a_{|H}, (h)\right) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$. Or $\chi_A = (\lambda_1 - X)\,\chi_C$ donc χ_C est encore scindé sur $\mathbf{K}$ de sorte que C est justiciable de l'hypothèse de récurrence et donc qu'existe une base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de H dans laquelle la matrice de $\pi \circ a_{|H}$ est triangulaire supérieure. La famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est alors une base de E. Montrons qu'elle convient :

$$a(\overrightarrow{e_1}) = \lambda_1\, \overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Vect}(e_1)$$

et, si $2 \leq j \leq n$, $a(\overrightarrow{e_j}) - \pi \circ a_{|H}(\overrightarrow{e_j}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$; ce vecteur s'écrit donc sous la forme $t_j\, \overrightarrow{e_1}$ et, comme $\overrightarrow{e_j} \in H$, $\pi \circ a_{|H}(\overrightarrow{e_j}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_j})$ d'où :

$$a(\overrightarrow{e_j}) = t_j\, \overrightarrow{e_1} + \pi \circ a_{|H}(\overrightarrow{e_j}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_j})$$

□

Exercice 33. Montrer qu'on peut de plus imposer à la réduite d'avoir des blocs diagonaux triangulaires ayant chacun une seule valeur propre et une taille égale à la multiplicité d'icelle.

Exercice 34 (Calcul fonctionnel). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $P \in \mathbf{C}[X]$. Exprimer la forme factorisée du polynôme caractéristique de $P(A)$ en fonction des valeurs propres de A. Que vaut $\mathrm{Tr}(A^k)$?

Exercice 35 (Centrale). Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A, en déduire un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer (a_n, b_n, c_n) tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$$

Exercice 36. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente si et seulement si $\chi_A = (-1)^n X^n$.

Exercice 37 (X). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle qu'existe un entier $p \in [|1, n|]$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \cdots = \mathrm{Tr}\left(A^p\right) = 0$$

Montrer que A est nilpotente ou possède au moins $p+1$ valeurs propres non nulles et distinctes.

2.5 Applications

2.5.1 Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice

Proposition 13. *Si u et $v \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors :*
- $\mathrm{Ker}\, u$ *et* $\mathrm{Im}\, u$ *sont stables par v.*
- *Tout sous-espace propre de u est stable par v.*
- *Plus généralement, si $P \in \mathbf{K}[X]$, v et $P(u)$ commutent donc* $\mathrm{Ker}\, P(u)$ *et* $\mathrm{Im}\, P(u)$ *sont stables par v.*

Exercice 38. Trouver le commutant de $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 39. -

1. Étudier le commutant d'un endomorphisme diagonalisable *(resp d'une matrice diagonale)*.
2. Prouver que si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes, alors le commutant de u est l'ensemble des polynômes en u.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Comparer les rangs de A sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. On suppose que A admet n valeurs propres *complexes* distinctes. Quel est l'ensemble des matrices réelles qui commutent à A ?

Exercice 40. Trouver le commutant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 41. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'elle a une valeur propre double α et une valeur propre simple β. Est-elle diagonalisable ?
2. Trigonaliser A En déduire que A est semblable à une matrice de la forme :
$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
3. Retrouver le résultat de la question précédente en montrant directement que :
$$\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(A - \alpha \mathrm{I}_E)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A - \beta \mathrm{I}_E)$$
4. Déterminer le commutant de A.

2.5.2 Puissances d'une matrice

Exercice 42. -

1. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calculer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

2. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire et en déduire que $\chi_A(A) = 0$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{Z}$.
4. Soit A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Trouver un polynôme annulateur de A de degré 3. En déduire A^n.

Exercice 43. Calculer A^n où A est la matrice de l'exercice 41 page 44

Exercice 44 (Centrale 2007). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$A^3 = A^2 + \frac{A}{4} - \frac{\mathrm{I}_n}{4}$$

1. Montrer qu'existent des suites $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$, $(b_k)_{k\in\mathbf{Z}}$, $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ A^k = a_k\mathrm{I}_n + b_kA + c_kA^2$$

2. (5/2) Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 45. Trouver les suites récurrentes réelles (u_n) satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} + 3\,u_{n+2} + 3\,u_{n+1} + 2\,u_n = \cos n\theta$$

avec les conditions initiales :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0$$

On introduira, pour cela les suites (X_n) et (B_n) de matrices colonnes définies par :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$$

et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que, pour tout n :

$$X_{n+1} = A\,X_n + B_n$$

et on procèdera, par exemple, par « variation de la constante ».

Exercice 46 (Ccp 2006). On considère la suite récurrente (u_n) satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = 11\,u_{n+2} - 39\,u_{n+1} + 45\,u_n$$

avec les conditions initiales :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1$$

Exprimer simplement u_n en fonction de n.

2.5.3 Équations algébriques d'inconnue matricielle

Exercice 47. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:

$$P(X) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

avec $P = X^2$, $P = X^2 + X$

Exercice 48. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ avec $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.

1. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Existe-t-il $X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $X^2 = A$?

Chapitre 3

Exemples de réduction avec Maple

3.1 Les commandes Maple

– Initialiser la bibliothèque d'algèbre linéaire :

$$with(linalg)$$

Si on met un " ; ", on obtient la liste des fonctions de la bibliothèque.

– Créer une matrice : On se donne la liste des vecteurs lignes qui sont eux mêmes des listes :

$$A := matrix([L_1, L_2, \ldots, L_n]);$$

$L_i = [a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,p}]$.
Créer la matrice diagonale $diag(a_1, \ldots, a_n)$

$$diag(a_1, \ldots, a_n)$$

(En particulier l'identité)

– Obtenir une matrice A :

$$evalm(A)$$

L'invocation de A ne retourne que le nom de la matrice.

– Accéder à l'élément $a_{i,j}$ de A :

$$A[i, j]$$

- Pivoter les lignes :
$$pivot(A, i, j)$$
En version 3 : Exécute l'opération :
$$\text{de } k = i + 1 \text{ à } n \; L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k,j}}{a_{i,j}} L_i$$
En version 4 : Même chose mais pour $k \neq i$.
Il ya déclenchement d'une erreur si $a_{i,j} = 0$.
- Permuter deux lignes :
$$swaprow(A, i, j)$$
swapcol pour les colonnes
- Faire simplement l'opération :
$$L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$$
$$addrow(A, i, j, lambda)$$
addcol pour les colonnes
- Base du noyau de l'application linéaire canoniquement associée à A [1]
$$nullspace(A)$$
- Liste des valeurs propres avec leur multiplicité respective et une base du sous-espace propre associé :
$$eigenvects(A)$$
- Polynôme caractéristique :
$$charpoly$$
Déterminant : *det*
- Somme de deux matrices A et B :
$$A + B \text{ ou } add(A, B)$$
Idem pour $A - B$.

[1] ie représentée par A lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont des $\mathbf{R}^n$ rapportés à leur base canonique respective

- Produit par un scalaire λ :
$$\lambda * A$$
- produit de A et B :
$$A\& * B$$
- Inverse de A :
$$A^{(-1)}$$
- Transposée de A :
$$transpose(A)$$
- Substituer a à x dans la matrice A :
$$subs(x = a, evalm(A))$$
- Appliquer la fonction f à tous les éléments de A :
$$map(f, evalm(A))$$
- Quotient de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q par rapport à la variable x :
$$quo(P, Q, x)$$
$\deg(P - UQ) < \deg(P)$ *si* U *est ledit quotient*
- Union des ensembles E et F (entre accolades) :
$$E\ union\ F$$
- Conversion d'un ensemble S en liste :
$$convert(S, list)$$
La fonction convert prend de nombreuses formes. Regarder la rubrique d'aide.

3.2 Étude d'un premier exemple

```
with(linalg):
A:=matrix([[a^2,a*b,a*b,b^2],
[a*b,a^2,b^2,a*b],[a*b,b^2,a^2,a*b],
```

```
[b^2,a*b,a*b,a^2]]);
I4:=diag(1,1,1,1);
M:=evalm(A-x*I4);
```

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{bmatrix} \quad I4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} a^2 - x & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 - x & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 - x & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 - x \end{bmatrix}$$

On règle le pivot de la première colonne de façon à faire apparaître le moins de polynômes possibles dans la suite :

```
M1:=swaprow(M,1,4);
M2:=pivot(M1,1,1);
```

$$M1 = \begin{bmatrix} b^2 & ab & ab & a^2 - x \\ ab & a^2 - x & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 - x & ab \\ a^2 - x & ab & ab & b^2 \end{bmatrix}$$

$$M2 = \begin{bmatrix} b^2 & ab & ab & a^2 - x \\ 0 & -x & -a^2 + b^2 & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} \\ 0 & -a^2 + b^2 & -x & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} \\ 0 & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} & -\frac{a^4-2\,a^2x+x^2-b^4}{b^2} \end{bmatrix}$$

On s'arrange pour prendre le pivot constant :

```
M3:=swaprow(M2,2,3);
M4:=pivot(M3,2,2);
```

$$M3 = \begin{bmatrix} b^2 & ab & ab & a^2 - x \\ 0 & -a^2 + b^2 & -x & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} \\ 0 & -x & -a^2 + b^2 & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} \\ 0 & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} & -\frac{a^4-2\,a^2x+x^2-b^4}{b^2} \end{bmatrix}$$

$$M4 = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & -\frac{ab\left(-a^2+x+b^2\right)}{a^2-b^2} & \frac{xb^2}{a^2-b^2} \\ 0 & -a^2 + b^2 & -x & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} \\ 0 & 0 & \frac{x^2-a^4+2\,a^2b^2-b^4}{a^2-b^2} & -\frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)^2}{(a^2-b^2)b} \\ 0 & 0 & -\frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)^2}{(a^2-b^2)b} & \frac{x^2-a^4+2\,a^2b^2-b^4}{a^2-b^2} \end{bmatrix}$$

Tous les pivots potentiels sont des polynômes en x. On fait baisser le degré via une division de polynômes.

```
qu:=quo(M4[3,3],M4[4,3],x);
```

$$-\frac{b}{a}$$

```
M5:=map(simplify,evalm(addrow(M4,4,3,-qu)));
qu:=quo(M5[4,3],M5[3,3],x);
M6:=map(factor,evalm(map(simplify,evalm(addrow(M5,3,4,-qu)))));
```

$$M5 = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & -\frac{ab\left(-a^2+x+b^2\right)}{a^2-b^2} & \frac{xb^2}{a^2-b^2} \\ 0 & -a^2+b^2 & -x & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} \\ 0 & 0 & -2\,a^2+2\,b^2+2\,x & -\frac{a^4-2\,a^2x+x^2-b^4}{ab} \\ 0 & 0 & -\frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)^2}{(a^2-b^2)b} & \frac{x^2-a^4+2\,a^2b^2-b^4}{a^2-b^2} \end{bmatrix}$$

$$qu = \frac{a}{2\,b} - \frac{ax}{(2\,a^2-2\,b^2)\,b}$$

$$M6 = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & -\frac{ab\left(-a^2+x+b^2\right)}{(a-b)(a+b)} & \frac{b^2x}{(a-b)(a+b)} \\ 0 & -(a-b)(a+b) & -x & \frac{a\left(-a^2+x+b^2\right)}{b} \\ 0 & 0 & -2\,a^2+2\,b^2+2\,x & -\frac{\left(-a^2+x+b^2\right)\left(x-b^2-a^2\right)}{ab} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\left(x-a^2-2\,ab-b^2\right)\left(-a^2+x+b^2\right)\left(x-a^2+2\,ab-b^2\right)}{2\,b^2(a-b)(a+b)} \end{bmatrix}$$

```
V1:=nullspace(subs(x=a^2-b^2,evalm(M6)));
V2:=nullspace(subs(x=a^2+2*a*b+b^2,evalm(M6)));
V3:=nullspace(subs(x=a^2-2*a*b+b^2,evalm(M6)));
P:=transpose(matrix(convert(V1 union V2 union V3,list)));
```

$$V1 = \{[0,-1,1,0],[-1,0,0,1]\}$$

$$V2 = \{[1,1,1,1]\}$$

$$V3 = \{[1,-1,-1,1]\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
Dia:=evalm(P^(-1)&*A&*P);
```

$$Dia = \begin{bmatrix} a^2+2\,ab+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2\,ab+b^2 \end{bmatrix}$$

Remarque 11. Les lecteurs traiteront plus simplement cet exemple en travaillant par blocs ou à l'aide de l'exercice 81.

3.3 Étude d'un second exemple

On étudie ici, à l'aide de Maple, la diagonalisation de la matrice M de terme général $\min(i, j)$. On commence par former la matrice

$$A(\lambda) = M - \lambda\,\mathrm{I}_n$$

puis on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de $A(\lambda)$. On observe alors qu'on a intérêt à refaire les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice obtenue. On trouve :

$$B(\lambda) = Q\,A(\lambda)\,P$$

Où P et $B(\lambda)$ sont calculées ci-dessous :

3.4 Les calculs Maple

```
> with(linalg):

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace
> f:=proc(i,j) global lambda; if (i=j) then i-lambda elif (j>i)
then i else j fi end;
```

$$f := \mathbf{proc}(i,\, j)\,\mathbf{global}\,\lambda;\ \mathbf{if}\,i = j\,\mathbf{then}\,i - \lambda\,\mathbf{elif}\,i < j\,\mathbf{then}\,i\,\mathbf{else}\,j\,\mathbf{fi}\,\mathbf{end}$$

```
> n:=7;A:=matrix(n,n,f);
```

$$n := 7$$

$$A := \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4-\lambda & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5-\lambda & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6-\lambda & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7-\lambda \end{bmatrix}$$

```
> for i from n to 2 by -1 do A:=addrow(A,i-1,i,-1)od:evalm(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

```
> for i from n to 2 by -1 do A:=addcol(A,i-1,i,-1)od:evalm(A);
```

On obtient la matrice $B(\lambda)$ définie plus haut :

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -2\,\lambda+1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2\,\lambda+1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\,\lambda+1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\,\lambda+1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\,\lambda+1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\,\lambda+1 \end{bmatrix}$$

Reste à calculer la matrice P.

```
>  P:=diag(1$n): for i from n to 2 by -1 do P:=addcol(P,i-1,i,-1)od:evalm(P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5 La réduction effective

3.5.1 Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres

Simplification du problème

Les opérations colonnes se traduisent par un changement d'inconnues. Associons à $X \in \mathbf{C}^n$ le vecteur X' défini par $X = P\,X'$ *ie* $X' = P^{-1}\,X$. Il vient alors :

$$\boxed{(M - \lambda\,\mathrm{I}_n)\,X = 0 \text{ si et seulement si } B(\lambda)\,X' = 0}$$

La recherche du spectre (complexe pour l'instant) de M se ramène à la recherche des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $B(\lambda)$ ne soit pas inversible c'est à dire tels qu'existe $X' \neq 0$ vérifiant $B(\lambda)\,X' = 0$, ce qui conduit au système :

$$\boxed{(S'_\lambda) \quad \begin{cases} (1-\lambda)\,x'_1 + \lambda\,x'_2 = 0 \\ \lambda\,x'_{i-1} + (1-2\,\lambda)\,x'_i + \lambda\,x'_{i+1} = 0 \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n-1 \\ \lambda\,x'_{n-1} + (1-2\,\lambda)\,x'_n = 0 \end{cases}}$$

Analyse : Si $X' \neq 0$ satisfait S'_λ, nécessairement $\lambda \neq 0$ et $x'_1 \neq 0$, de sorte que, quitte à remplacer X' par un vecteur non nul colinéaire, on peut supposer $x'_1 = 1$. Réglons deux complexes x'_0 et x'_{n+1} tels que la relation :

$$\lambda\, x'_{i-1} + (1 - 2\,\lambda)\, x'_i + \lambda\, x'_{i+1} = 0$$

Soit encore vérifiée pour $i = 1$ et $i = n$. On trouve :

$$\boxed{x'_0 = x'_1 = 1 \quad \text{et} \quad x'_{n+1} = 0}$$

Si on considère maintenant la suite récurrente $s_\lambda = (\xi_i)_{i\geq 0}$ définie par :

$$\boxed{\begin{cases} \xi_0 = \xi_1 = 1 \\ \lambda\, \xi_{i-1} + (1 - 2\,\lambda)\, \xi_i + \lambda\, \xi_{i+1} = 0 \quad \text{pour } i \geq 1 \end{cases}}$$

Une récurrence immédiate sur i amène $\xi_i = x'_i$ pour $0 \leq i \leq n+1$. On en déduit que **si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, la suite s_λ vérifie $\xi_{n+1} = 0$**

Synthèse : Supposons réciproquement que la suite s_λ vérifie $\xi_{n+1} = 0$ Le vecteur X' défini par :

$$X' = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Satisfait à $X' \neq 0$ et $B(\lambda)\, X' = 0$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$.

Recherche explicite

Le polynôme caractéristique de la suite s_λ peut s'écrire :

$$P(X) = X^2 - \frac{2\lambda - 1}{\lambda}\, X + 1$$

Commençons par rechercher les valeurs propres λ **réelles et telles que le polynôme P ait deux racines complexes conjuguées**. Comme le produit des racines vaut 1, les deux racines peuvent se représenter sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} \quad \theta \notin \pi\,\mathbf{Z}}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{2\lambda - 1}{\lambda} = 2\cos\theta}$$

et l'existence de deux constantes A et B telles que :

$$\forall k,\ \xi_k = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,\theta} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,\theta}$$

avec, après calcul :

$$\boxed{A = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}{2\,\cos(\frac{\theta}{2})} \qquad B = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}{2\,\cos(\frac{\theta}{2})}}$$

D'où, pour tout $k \geq 0$:

$$\boxed{\xi_k = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,\theta} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,\theta} = \frac{\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\,\theta\right]}{\cos(\frac{\theta}{2})}}$$

La condition $\xi_{n+1} = 0$ s'écrit donc :

$$\exists k \in \mathbf{Z}\ /\ \theta = \frac{(2k+1)}{(2n+1)}\pi = \theta_k$$

Or les θ_k où $k = 0, \ldots, n-1$ appartiennent à $]0, \pi[$ et les $\cos\theta_k$ sont deux à deux distincts. Les polynômes P correspondant ont bien deux racines complexes conjuguées donc les λ_k définis par :

$$\boxed{2 - \frac{1}{\lambda_k} = 2\,\cos\theta_k}$$

Sont n valeurs propres distinctes réelles de M. Il n'y en a pas d'autre.
Les lecteurs trouveront facilement une base de vecteurs propres de M.

Chapitre 4

Compléments

TOUS LES RÉSULTATS DE CE CHAPITRE SONT HORS PROGRAMME PC*

4.1 Diagonalisation simultanée

Théorème 8 (Diagonalisation simultanée d'une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables). *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille (éventuellement infinie) d'endomorphismes d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie qui sont tous diagonalisables. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de tous les u_i soit diagonale est que les u_i commutent deux à deux :*

$$\forall i, j \in I, \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$$

Démonstration. (Preuve abrégée) Si les u_i codiagonalisent dans une base (e), il est clair qu'ils commutent deux à deux. La réciproque se prouve par récurrence sur la dimension de l'espace. Si tous les u_i sont des homothéties, n'importe quelle base convient, sinon on choisit un u_{i_0} qui n'est pas une homothétie et on décompose E en somme directe des sous-espaces propres de u_{i_0} :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$$

où $\dim E_k < \dim E$ et on applique l'hypothèse de récurrence aux l'endomorphismes $v_{i,k} \in \mathcal{L}(E_k)$ qu'induisent les u_i sur E_k ce qui est licite *via* la proposition 13 et le théorème 3. □

Exercice 49 (Un cas particulier du théorème 8). Prouver que si deux endomorphismes u et v du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E *(resp deux* $\mathbf{K}$*-matrices* A *et* B*)* diagonalisables commutent, il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v. *(resp il existe* P *inversible telle que* $P^{-1}AP$ *et* $P^{-1}BP$ *soient simultanément diagonales).* On dit que les deux endomorphismes *(resp matrices)* sont *codiagonalisables.*

Exercice 50 (Matrices circulantes). Soit $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots\cdots & & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & & a_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots & & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$ où J est une matrice à préciser.
2. Diagonaliser J. En déduire l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que
$$P^{-1} M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})\, P$$
soit diagonale pour tous les systèmes $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$.
3. Prouver que :
$$\mathcal{M} = \{M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}),\ (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n\}$$
est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
4. Préciser le déterminant de $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ *déterminant circulant*
5. Prouver que l'inverse d'un élément inversible de $\mathcal{M}$ est encore dans $\mathcal{M}$.

Exercice 51. Voir le Td Maple. Si a, b, c, d sont quatre complexes, on note :

$$M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c & 6d \\ b & a & 3d & 3c \\ c & 2d & a & 2b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

On pose $J = M(0,1,0,0)$ et $K = M(0,0,1,0)$.

1. Exprimer $M(a,b,c,d)$ en fonction de J et K.
2. Prouver que
$$\mathcal{M} = \{M(a,b,c,d),\ (a,b,c,d) \in \mathbf{C}^4\}$$
est une sous algèbre commutative et unitaire de $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$.
3. Prouver que tout les éléments de $\mathcal{M}$ codiagonalisent. En déduire :
   (a) Le déterminant d'un élément de $\mathcal{M}$.
   (b) Les inversibles de cette algèbre.

Exercice 52. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E qui commutent deux à deux.

1. Montrer que les u_i ont un vecteur propre commun.
2. Prouver qu'ils sont cotrigonalisables.

4.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 9 (Cayley-Hamilton). *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_u(u) = 0$.*

Démonstration. **a) Preuve abrégée si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$:** Par récurrence sur n. C'est clair si $n = 1$. Supposons le vrai pour $n - 1 \geq 1$ et prouvons le pour n. Il existe une base (e) de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. L'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est stable par u et donc le couple (H, u_H) est justiciable de l'hypothèse de récurrence c'est-à-dire que :

$$\chi_{u_H}(u_H) = 0 \ \text{ avec } \ \chi_{u_H} = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_{n-1})$$

Or $\chi_u(X) = \chi_{u_H}(X)(X - \lambda_n) = (X - \lambda_n)\chi_{u_H}(X)$. Soit alors $k \in [|1, n|]$.

$$\chi_u(u)(e_k) = \begin{cases} (u - \lambda_n \mathrm{I}_E) \circ \chi_{u_H}(u)(e_k) & \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ \chi_{u_H}(u) \circ (u - \lambda_n \mathrm{I}_E)(e_n) & \text{si } k = n \end{cases}$$

Or, pour tout entier naturel p et pour tout $x \in H$ il vient $u^p(x) = u_H^p(x)$ donc, puisque $e_k \in H$ pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $\chi_{u_H}(u)(e_k) = \chi_{u_H}(u_H)(e_k) = 0$. Pour $k = n$ on observe que le vecteur $x = (u - \lambda_n \mathrm{I}_E)(e_n)$ appartient à H et donc que $\chi_u(u)(e_n) = \chi_{u_H}(u)(x) = \chi_{u_H}(u_H)(x) = 0$. $\chi_u(u)$, qui s'annule sur la base (e), est donc nul.

b) Preuve abrégée dans le cas général : Soit $\overrightarrow{x} \in E - \{\overrightarrow{0}\}$. Il existe un entier naturel $p \in [|1, n|]$ tel que la famille $\left(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \ldots, u^{(p-1)}(\overrightarrow{x})\right)$ soit libre et la famille $\left(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \ldots, u^{(p-1)}(\overrightarrow{x}), u^p(\overrightarrow{x})\right)$ soit liée de sorte que :

$$u^p(\overrightarrow{x}) \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \ldots, u^{(p-1)}(\overrightarrow{x})\right) \quad \text{noté } F$$

Donc il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que :

$$u^p(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i\, u^i(\overrightarrow{x}) \quad ie \quad P(u)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \ \text{ avec } P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i\, X^i$$

F est stable par u et, en calculant en fonction des a_i, la matrice de u_F dans la base $\left(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \ldots, u^{(p-1)}(\overrightarrow{x})\right)$ de F on trouve :

$$\chi_{u_F} = (-1)^p\, P$$

de sorte que $\chi_{u_F}(u)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ et donc $\chi_u(u)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ puisque, en vertu du théorème 4, χ_{u_F} divise χ_u. Le résultat s'en déduit en libérant $\overrightarrow{x}$.

□

Exercice 53. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que :

$$\operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}\left(u^2\right) = \cdots = \operatorname{Tr}\left(u^n\right) = 0$$

1. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, montrer que 0 est racine de χ_u.
2. Montrer que u est nilpotent.
3. Caractériser les endomorphismes nilpotents à l'aide de leur polynôme caractéristique.

Exercice 54. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ / \ AM = MA\}$$

1. Si A est triangulaire supérieure, montrer, en étudiant l'endomorphisme de $\mathcal{T}_n^+(\mathbf{C})$ défini par $M \mapsto AM - MA$, que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de dimension $\geq n$.
2. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\mathcal{C}\left(\mathcal{C}(A)\right)$ est l'ensemble des polynômes en A.

Chapitre 5

Travaux dirigés

Le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ précisé si nécessaire.

Exercice 55 (Mines 2002). Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre 3 telles que $A^3 = B^3 = 0$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même rang.

Exercice 56 (Mines 97). Une matrice carrée complexe de taille 2 est-elle toujours semblable à une matrice symétrique ? Est-elle toujours produit de deux matrices symétriques ?

Exercice 57 (X 2006). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, non nulle. Montrer que $A^2 = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} (0) & \mathrm{I}_r \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right) \qquad \text{avec } \ 0 < 2r \leq n.$$

Exercice 58 (Iie 2005). Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que $\sin a \neq 0$. On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sin a & \sin 2a \\ \sin a & 0 & \sin 2a \\ \sin 2a & \sin a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour $\cos a \notin \{1/2, -1/4\}$, diagonaliser A.
3. Étudier la diagonalisabilité de A dans les autres cas.

Exercice 59 (Ccp 2006). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\chi_A = (X-1)^2(X-2)$$

Les affirmations suivantes sont elles vraies ?

1. $n = 4$.
2. A est diagonalisable.
3. A est trigonalisable.

Exercice 60 (Ccp 2004). Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer A^p, $p \in \mathbf{Z}$ sans calcul matriciel.
2. A est-elle diagonalisable, déterminer ses éléments propres.

Exercice 61 (Ccp 2000). La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 62 (Mines). $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$.
2. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1$$

3. A est-t-elle diagonalisable ?
4. On choisit maintenant $a_i = i$. Trouver un équivalent, quand $n \to \infty$, de la plus grande valeur propre de A.

Exercice 63 (Mines). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par :

$$\begin{cases} a_{i,j} = a & \text{si } i < j \\ a_{i,i} = 0 & \\ a_{i,j} = b & \text{si } i > j \end{cases}$$

1. A est-t-elle diagonalisable ?
2. Soient u et v deux complexes distincts et $k \in \mathbf{R}_+^*$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan euclidien tels que $|z-v|^2 - k\,|z-u|^2 = 0$. Prouver que les images des valeurs propres de A dans le plan complexe sont cocycliques ou alignées.

Exercice 64 (Centrale 2004). À quelle condition les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad a_i \in \mathbf{K}$$

sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?

Exercice 65 (Mines 2001). Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & e & f & g \\ 0 & 1 & h & i \\ 0 & 0 & 1 & j \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{K}$ si et seulement si elle possède quatre valeurs propres distinctes dans $\mathbf{K}$.

Exercice 66 (Centrale 2004). -

1. La matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & 1 \\ \mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$
est-elle diagonalisable ?
2. A est-elle semblable à :
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ?}$$

Exercice 67 (Mines 2004). La matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad z \in \mathbf{R}$$
est-elle diagonalisable ?

Exercice 68 (X 2004). Soient a, b, c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & ba & ac \\ ab & 1 + b^2 & cb \\ ac & bc & 1 + c^2 \end{pmatrix}$$
Est-elle diagonalisable ? Déterminer ses sous-espaces propres.

Exercice 69 (Mines 99). Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, tels que :
$$u \circ v = v \circ u \quad \text{et} \quad (u - \alpha \mathrm{I}_E) \circ (v - \beta \mathrm{I}_E) = 0$$
Quelles sont les valeurs propres de $u + v$?

Exercice 70 (Ccp 2001). Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie d'endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension n qui vérifie :
$$\begin{cases} \forall k \in [|1, p|] & f_k^2 = -\mathrm{I}_E \\ \forall k,\ j \in [|1, p|] \ / \ k \neq j & f_k \circ f_j + f_j \circ f_k = 0 \end{cases}$$

1. $\mathrm{Sp}(f_k)$?
2. Diagonalisabilité de f_k ?
3. $\mathrm{Tr}(f_k)$?

Exercice 71 (TPE 2004). Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension n et L l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f \mapsto f + \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{I}_E$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\,L$, $\mathrm{Im}\,L$ et L^{-1} s'il existe.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de L. Est-il diagonalisable ?
3. Déterminer un polynôme annulateur de L.
4. Pour $n = 2$, déterminer la matrice de L dans la base de $\mathcal{L}(E)$ naturellement associée à une base de E.

Exercice 72 (Centrale 2003). Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, on définit un endomorphisme G de $\mathcal{L}(E)$ par :

$$f \mapsto f \circ g - g \circ f$$

1. Montrer que si g est nilpotent, G aussi.
2. Montrer que si g est diagonalisable, G aussi.
3. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, de vecteurs non nuls, il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(x) = y$.
4. Montrer que si G est diagonalisble, g aussi. Ce résultat tient-il si le corps est $\mathbf{R}$?

Exercice 73 (Centrale 98, 99, 2000, 2001). $\dim_K(E) = n$. Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\Phi_u(f) = u \circ f \circ u^{-1}$.

1. Montrer que Φ_u est un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que si u est diagonalisable, Φ_u aussi.
3. Montrer que la réciproque est généralement fausse. On prendra $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (Non posée au concours) Montrer que, si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ la réciproque est vraie.

Exercice 74 (Mines 2004). Trouver le nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ de l'équation en X : $X^2 + 2\,X = A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 14 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 75 (Cen 99). -

1. Trouver les éléments propres de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Trouver les $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $X^2 = A$.
3. Trouver les $Q \in \mathbf{R}[X]$ tels que $Q(A)^2 = A$.

Exercice 76 (Mines 2004). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont les valeurs propres sont les racines $n$iemes de l'unité et $B = A^2 + A - 6$.

1. Montrer que B est inversible.
2. Montrer qu'existe un unique $P \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que $B^{-1} = P(A)$.
3. Expliciter P.

Exercice 77 (Mines 2003). Trouver les $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A^3 = B$ avec :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 78 (Centrale 2007). Trouver les $X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 79 (Mines 98 et Cen 2000 et 2006). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall i, j,\ a_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) = 1$.
2. Prouver que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_C(A)$ et $\lambda \neq 1$ alors $|\lambda| < 1$.
3. Montrer qu'existe $a \in \mathbf{C}$ tel que pour toute valeur propre λ de A on ait $|\lambda - a| < 1$.

Exercice 80 (Centrale 2004). $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ A & A \end{pmatrix}$$

Valeurs propres de B en fonction de celles de A ?

Exercice 81 (Mines 99, 2002, 2005 Ccp 2001). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$

l'est aussi.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. A quelle condition la matrice

$$\begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Généraliser.

Exercice 82 (Centrale 2000). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et :

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A \\ -A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A^2)$ et les sous-espaces propres de M.

2. Condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit diagonalisable ?

Exercice 83 (Ens 98). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable. A l'est-elle ? Et si le corps est $\mathbf{R}$?

Exercice 84 (Ccp 2000, Centrale 2003, X 2007). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que A^p $(p \geq 1)$ soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ et qu'on peut remplacer cette condition par $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^p$.

Exercice 85 (CCP 97 et Cen 2003). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ $(\dim E = n)$ tel que :

$$(f - \mathrm{I}_E)^2 \circ (f + 2\mathrm{I}_E) \neq 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{I}_E)^3 \circ (f + 2\mathrm{I}_E) = 0,$$

montrer que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 86 (Mines 2004). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 87 (Ccp 99). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^5 = A + \mathrm{I}_n$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 88 (X 2006). Pour quels entiers naturels n existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :

$$M^3 - M^2 - M - 2\,\mathrm{I}_n = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{Tr}(M) = 0 \ ?$$

Exercice 89 (X 2004). Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique de $A = X\,{}^tX$.

Exercice 90 (Mines 2001, 2005, Centrale 2002, 2003). Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ vérifiant :

$$M^k = \lambda^k A + \mu^k B \text{ pour } k = 1, 2, 3$$

M est-t-elle diagonalisable ?

Exercice 91 (Ccp 99). Résoudre le système suivant d'inconnues $(X, Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})^2$:

$$XY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad YX = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 92 (Centrale 2004).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver les couples (X, Y) d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $XY = YX = A$.

Exercice 93 (Centrale 2002). On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer un polynôme annulateur de A.
4. Montrer que (I_3, A, A^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
5. Trouver tous les polynômes annulateurs de A.
6. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ vérifiant les deux conditions :
   i) $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$,
   ii) la famille (I_3, M, M^2) est libre.
   Montrer que M est semblable à A.

Exercice 94 (Centrale 2004). Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

1. Montrer qu'il existe R, Q dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$AR = RB, \qquad AQ = QB, \qquad R + \mathrm{i}Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$$

2. Montrer que $\det(R + zQ)$ est un polynome en z ; en déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
3. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est réellement semblable à une matrice d'un des trois types suivants (tous les paramètres sont réels) :

$$\rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

4. Étudier, en fonction des paramètres réels a, b, c, d, les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par x_0, y_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a\,x_n + b\,y_n \\ y_{n+1} = c\,x_n + d\,y_n \end{cases}$$

Exercice 95 (Centrale 2003 et 2007). Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que les seuls sous-espaces stables par f soient $\{0\}$ et E. Que dire de la dimension de E ? Même question si le corps est $\mathbf{R}$.

Exercice 96 (X 2002). Prouver qu'une matrice non nulle est semblable à une matrice dont aucun élément diagonal n'est nul.

Exercice 97 (Mines 97 et 2001, X 2002). $\dim E = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

1. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ a n valeurs propres distinctes il est cyclique.
2. Montrer que si u est nilpotent, il est cyclique si et seulement si $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
3. Soit u un endomorphisme cyclique de $E = \mathbf{C}^n$.
   (a) Quelles valeurs peut prendre le rang de u ? Donner un exemple pour chacune de ces valeurs.
   (b) Déterminer χ_u.
   (c) Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u.
   (d) À quelle condition nécessaire et suffisante u est-il diagonalisable ?

(e) Soit M la matrice canoniquement associée à u. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :

$$^t\,\mathrm{Com}(M) = P(M)$$

Exercice 98 (Centrale 99). Soit E un **C**-espace vectoriel de dimension finie, f, g deux endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha\, f \quad \alpha \neq 0$$

1. Montrer que $f^k \circ g - g \circ f^k = k\alpha f^k$.
2. Soit (λ, v) un couple propre de g. Montrer qu'existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^k(v) = 0$.
3. On suppose que g est diagonalisable, montrer que f est nilpotent.

Exercice 99 (Centrale 2000). Soit E un **C**-espace vectoriel de dimension n, u, v deux endomorphismes de E tels que :

$$u \circ v - v \circ u = \alpha\, u + \beta\, v$$

1. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun en commençant par le cas $\alpha = \beta = 0$.
2. Calculer $u^k \circ v - v \circ u^k$.

Exercice 100 (Mines 2002 et 2003). Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f\circ g - g\circ f$ soit de rang 1. Prouver que, si $x \in \mathrm{Im}(f \circ g - g \circ f)$, alors $\forall n \geq 1,\ f^n(x) \in \mathrm{Ker}(f \circ g - g \circ f)$. En déduire que χ_f se décompose en un produit d'au moins deux facteurs.

Exercice 101 (Mines). Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$$

Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \det(\mathrm{I}_n + \lambda A) = \det(\mathrm{I}_n + \lambda B)$$

Exercice 102 (X99). Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On pose $S_j = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| > 0$. Prouver l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{jj}|}{S_j} \leq \mathrm{rg}\, A$$

Exercice 103 (X 2005 et 2006). Soient M et N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que N est nilpotente et que $MN = NM$. Montrer, en commençant par le cas où M est inversible, que $\det(M+N) = \det M$.

Exercice 104 (Mines 2003). Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $AB = 0$. Prouver qu'elles ont un vecteur propre commun puis qu'elles sont simultanément trigonalisables.

Exercice 105 (X98 et cen 99). Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $A, B, C \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$AC = CA \qquad BC = CB \qquad AB = BA + C$$

Prouver que A, B, C ont un vecteur propre commun, puis qu'ils sont cotrigonalisables.

Exercice 106 (X 2000). Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

i) $E = \mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E)$.

ii) u admet un polynôme annulateur $P \in \mathbf{R}[X]$ dont λ est racine simple.

Exercice 107 (Ens 2003). Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $r_i(A) = \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont dans l'union des disques de centres a_{ii} et de rayons $r_i(A)$.
2. Pour $i \neq j$, on définit :

$$B_{ij} = \{z \in \mathbf{C} \;/\; |(z - a_{ii})(z - a_{jj})| \leq r_i(A) r_j(A)\}$$

   Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} B_{ij}$.

Exercice 108 (Centrale 98). Déterminer les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbf{Z}^2$ tels que le polynôme $X^2 - \lambda X + \mu$ ait deux racine de module 1.
Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ dont une des puissances vaut I_2.

Exercice 109 (X 98). On note $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Soit $\Omega \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que tous les éléments de Ω soient à coefficients dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ et vérifient la propriété suivante :

$$\forall A \in \Omega,\ \exists p \in \mathbf{N}^* \;/\; A^p = \mathrm{I}_n$$

Montrer que :

$$\exists q \in \mathbf{N}^* \;/\; \forall A \in \Omega,\ A^q = \mathrm{I}_n$$