Intégrale des fonctions continues par morceaux à valeurs dans un Espace vectoriel normé de dimension finie

4 avril 2002

Table des matières

Ce papier doit être lu après celui sur la dérivation des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

- Dans ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, précisé si nécessaire. E est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie.
- Les lettres I, J désignent des intervalles non réduits à un point.
- La théorie de l'intégrale vue en première année est supposée connue.
- La définition des applications continues où de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans E est analogue à celle des fonctions à valeurs scalaires (*dans* $\mathbf{K}$*)*, c'est-à-dire qu'on définit d'abord les applications continues où de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur un segment *via* les subdivisions d'icelui, le cas général s'obtenant par l'intermédiaire des restrictions aux segments de I. Les lecteurs prouveront alors, à titre d'exercice, les propriétés suivantes qui seront rappelées dans la suite :
  - Toute combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur I l'est encore.
  - Si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est un système de vecteurs de E et si $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est un système d'aplications $\mathcal{C}^n$ par morceaux de I dans $\mathbf{K}$, il en est de même de $\sum_{j=1}^n f_j\, \overrightarrow{u_j}$.
  - Si u est continue *resp* de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans F ($\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie) et si f est continue par morceaux *resp* de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux de I dans E, il en est de même de $u \circ f : I \to F$.
  - Une application $f : I \to E$ f est continue par morceaux *resp* de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur I si et seulement si il en est de même de toutes ses composantes dans une base de E.

Première partie

L'intégrale des applications continues par morceaux sur un segment à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

1 Intégrale définie d'une application continue par morceaux

Définition 1. *Soit f une application continue par morceaux de I dans E. Soit $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E, dont la base duale, base des formes coordonnées dans (e), est notée $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$. Posons :*

$$f_j = \pi_j \circ f \qquad ie\ \forall t \in I, \quad \overrightarrow{f(t)} = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\overrightarrow{e_j}$$

Les f_j sont donc des applications continues par morceaux de I dans $\mathbf{K}$. Alors, si a et b sont deux éléments de I, le vecteur :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j(t)\,\mathrm{d}t \right) \overrightarrow{e_j}}$$

ne dépend pas de la base (e) choisie, on le note

$$\boxed{\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t}$$

de sorte que, pour $1 \leq j \leq n$:

$$\boxed{\pi_j \left(\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b (\pi_j \circ f)(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)}$$

On remarquera alors que, si ϕ une forme linéaire sur E. Alors $\phi \circ f : I \to \mathbf{K}$ est continue par morceaux sur I et :

$$\boxed{\phi \left(\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b (\phi \circ f)(t)\,\mathrm{d}t \qquad (2)}$$

Démonstration. Pour établir que le vecteur $\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j(t)\,\mathrm{d}t \right) \overrightarrow{e_j}$ ne dépend pas de la base (e) choisie, il suffit de faire un calcul de changement de base.

Comme toute forme linéaire sur E est combinaison linéaire des (π_j), le résultat général (2) résulte de (1). □

Proposition 1. *Si $f \in C^1(I, E)$, $a, b \in I$ alors :*

$$\boxed{\int_a^b \overrightarrow{f'(x)}\,\mathrm{d}x = \overrightarrow{f(b)} - \overrightarrow{f(a)} \quad \text{noté aussi } [f]_a^b}$$

Démonstration. Immédiat par passage aux composantes. □

Remarque 1. *Ce résultat est faux dans un contexte plus général que l'on a étudié pour les fonctions à valeurs scalaires. Il reste vrai si f est* **continue** *et C^1 par morceaux. Lors de l'application de cette formule les hypothèses doivent être clairement explicitées. .*

Définition 2 (Intégrale d'une forme différentielle entre deux bornes). *Soient $g \in C^0(I, E), f \in C^1(I, \mathbf{K})$, en notant $\mathrm{d}f$ la différentielle de f, on peut définir la forme différentielle :*

$$\omega = g\,\mathrm{d}f$$

C'est à dire que la valeur de $\omega(t)$ au point $t \in I$ est la forme linéaire sur $\mathbf{R}$:

$$g(t)\overrightarrow{f'(t)}\,\mathrm{d}t \quad ie \quad h \mapsto g(t)\overrightarrow{f'(t)}\,h$$

Les symboles :

$$\boxed{\int_a^b \omega = \int_a^b g\mathrm{d}f = \int_a^b g(t)\mathrm{d}\overrightarrow{f(t)}}$$

Désignent la valeur de l'intégrale :

$$\boxed{\int_a^b g(t)\overrightarrow{f'(t)}\,\mathrm{d}t}$$

Remarque 2. *Ces notations sont particulièrement commodes lors des changements de variables.*

1.1 Propriétés opératoires

Proposition 2. *Soient f, g continues par morceaux de I dans E. Si $a, b, c \in I$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, il vient :*

$$\boxed{\int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^c \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x + \int_c^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{(Chasles)}}$$

$$\boxed{\int_b^a \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int_a^a \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x = 0}$$

$$\boxed{\int_a^b \overrightarrow{(\alpha f + \beta g)(x)}\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b \overrightarrow{g(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{(Linéarité de l'intégrale)}}$$

Démonstration. Immédiates par passage aux coordonnées dans une base. □

Proposition 3. *Soit f une application continue par morceaux de I dans E et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ un système de vecteurs de E et si $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est un système d'aplications continues par morceaux de I dans $\mathbf{K}$, il en est de même de $\sum_{i=1}^n f_i \overrightarrow{u_i}$ et :*

$$\boxed{\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(t)\, \overrightarrow{u_i}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) \overrightarrow{u_i}}$$

Démonstration. On munit E d'une base $(\overrightarrow{e_i})_{1 \le i \le n}$ de base duale $(\pi_i)_{1 \le i \le n}$. Il suffit d'appliquer π_j aux deux membres de la relation à prouver et d'utiliser la relation (1). □

Proposition 4. *Soit f continue par morceaux de I dans E, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u \circ f$ est encore continue par morceaux de I dans F et, si a et b sont deux éléments de I :*

$$\boxed{u \left(\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b (u \circ f)(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. On choisit une base (e) de E :

$$\overrightarrow{f(t)} = \sum_{j=1}^n f_j(t)\, \overrightarrow{e_j}$$

$$\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b f_j(t)\,\mathrm{d}t \right) \overrightarrow{e_j}$$

$$u \left(\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t \right) = \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b f_j(t)\,\mathrm{d}t \right) u\left(\overrightarrow{e_j}\right)$$

qui vaut encore, d'après la proposition 3 :

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n f_j(t)\, u\left(\overrightarrow{e_j}\right) \right) \mathrm{d}t$$

D'où le résultat puisque :

$$u\left(\overrightarrow{f(t)}\right) = \sum_{j=1}^n f_j(t)\, u\left(\overrightarrow{e_j}\right)$$

□

Exemple 1. *Soit $t \mapsto M(t)$ une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. ce qui signifie que les coefficients $a_{i,j}(t)$ qui représentent les composantes de $M(t)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.*
Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application définie par :

$$X \mapsto PX$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Il s'ensuit :

$$\boxed{P \left(\int_a^b M(t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b PM(t)\,\mathrm{d}t}$$

Si $P \in GL_n(\mathbf{K})$, l'application définie par :

$$X \mapsto P^{-1} X P$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*. Il s'ensuit :*

$$\boxed{P^{-1}\left(\int_a^b M(t)\,\mathrm{d}t\right)P = \int_a^b P^{-1}M(t)P\,\mathrm{d}t}$$

De même, on aurait :

$$\boxed{\mathrm{Tr}\left(\int_a^b M(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Tr}(M(t))\,\mathrm{d}t}$$

Proposition 5. *Les intégrales de deux fonctions continues par morceaux de* $[a,b]$ *dans* E *qui coïncident sauf au plus sur une partie finie sont égales. On peut donc définir* $\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t$ *où* f *est définie sur* $[a,b]-\{t_0,t_1,\ldots,t_p\}$ *et se prolonge en une fonction continue par morceaux sur* $[a,b]$.

Démonstration. Déja vue. □

1.2 Positivité, croissance

Proposition 6. *Soient* $f,g \in C^0([a,b],\mathbf{R})$ *avec* $a<b$*. Si* $f \geq 0$ *sur* $[a,b]$ *(resp* $f \leq g$*) alors :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \qquad \textit{resp} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Démonstration. Déja vue.

REMARQUE IMPORTANTE 1. ATTENTION A L'ORDRE DES BORNES D'INTEGRATION.

Proposition 7. *Sous les mêmes hypothèses* ($f \geq 0$) *et s'il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) > 0$ *alors* $\int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x > 0$*. Ce qui peut aussi s'écrire :*

$$\boxed{\forall f \in C^0([a,b],\mathbf{R}), f \geq 0 \ \textit{et} \ \int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f = 0}$$

Démonstration. Déja vu. □

Proposition 8 (Corollaire). *Si* f *est continue sur* $[a,b]$ $(a<b)$ *à valeurs réelles :*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t}$$

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si f *a un signe constant.*

REMARQUE IMPORTANTE 2. ATTENTION A L'ORDRE DES BORNES D'INTEGRATION.

Démonstration. On applique la croissance de l'intégrale à l'inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$. Supposons maintenant l'égalité. Quitte à changer f en son opposée, on peut supposer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. La fonction $|f|-f$ est continue sur $[a,b]$, positive, d'intégrale nulle, elle y est donc nulle d'après 7. □

Proposition 9 (Cas des fonctions à valeurs vectorielles). *Si* f *est continue par morceaux sur* $[a,b]$ $(a<b)$ *à valeurs dans* E *et si* $\|\ \|$ *est une norme quelconque sur* E *:*

$$\boxed{\left\|\int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x\right\| \leq \int_a^b \|\overrightarrow{f(t)}\|\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. On suppose d'abord f continue sur $[a,b]$. On verra plus loin que, pour une fonction continue sur un segment à valeurs vectorielles, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale *[théorème 1]* donc :

$$\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{R_n}$$

avec :

$$\overrightarrow{R_n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}$$

D'où :

$$\|\overrightarrow{R_n}\| \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \left\|\overrightarrow{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}\right\|$$

En passant cette inégalité à la limite, on a l'inégalité voulue.
Si f est maintenant continue par morceaux sur $[a,b]$, on considère une subdivision $(x_0,\ldots,x_n)$ de $[a,b]$, adaptée à f. Si $f_i \in \mathcal{C}([x_{i-1},x_i])$ telle que, pour

$x \in]x_{i-1}, x_i[$, $\overrightarrow{f_i(x)} = \overrightarrow{f(x)}$ alors :

$$\left\| \int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \overrightarrow{f_i(x)}\,\mathrm{d}x \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \overrightarrow{f_i(x)}\,\mathrm{d}x \right\|$$

On peut appliquer l'inégalité précédente à f_i qui est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \overrightarrow{f_i(x)}\,\mathrm{d}x \right\| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} ||\overrightarrow{f_i(x)}||\,\mathrm{d}x$$

Or $x \mapsto ||\overrightarrow{f_i(x)}||$ est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et coïncide avec $||\overrightarrow{f(x)}||$ sur $]x_{i-1}, x_i[$, donc :

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} ||\overrightarrow{f_i(x)}||\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^b ||\overrightarrow{f(x)}||\,\mathrm{d}x$$

et l'inégalité voulue. □

Proposition 10 (Inégalité de la moyenne). *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E :*

$$\boxed{\left\| \int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x \right\| \leq \int_a^b ||\overrightarrow{f(t)}||\,\mathrm{d}t \leq (b-a) \sup_{[a,b]} ||f||}$$

Démonstration. $||f||$ est bornée sur $[a,b]$ car elle y est continue par morceaux. Le résultat découle du précédent et de la croissance de l'intégrale. □

Remarque 3. *Ces "formules de la moyenne", considérées par certains comme l'alpha et l'oméga des cours de calcul différentiel et intégral, ont d'autant moins d'intérêt que la fonction varie beaucoup sur le segment d'intégration. Les majorations qu'elles induisent sont souvent trop pessimistes.*

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour mémoire. Revoir cours sur les espaces préhilbertiens.

2 Sommes de Riemann

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], E)$. alors :*

$$\boxed{\int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}}$$

Démonstration. On se ramène au cas des fonctions à valeurs scalaires par passage aux coordonnées dans une base. □

Exercice 1. *Soit f une application continue d'un intervalle $[a,b]$ dans un* **R** *espace vectoriel normé E ; on suppose que $f([a,b]) \subset C$ convexe fermé de E. Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ appartient à C.*

3 Primitives et intégrales d'une fonction continue

Proposition 11. *Soit f une application continue d'un intervalle I dans E et $a \in I$. Alors l'application $F_a : I \to E$:*

$$x \mapsto \int_a^x \overrightarrow{f(t)}dt$$

est l'unique primitive de f sur I telle que $F_a(a) = 0$. Si h est une autre primitive de f sur I, alors, pour $x \in I$:

$$\overrightarrow{h(x)} - \overrightarrow{h(a)} = \overrightarrow{F_a(x)}$$

Démonstration. Il suffit de prendre une base de E et de se ramener au cas des fonctions numériques. □

REMARQUE IMPORTANTE 3. ATTENTION A BIEN PRECISER LA CONTINUITE DE f.

Proposition 12. *Soient u et v deux applications de classe C^1 d'un intervalle J dans* **R** *et f une application continue d'un intervalle I dans E. On suppose que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$. La fonction $G : J \to$* **K** *définie par :*

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

est de classe C^1 et

$$\boxed{\forall x \in J, \overrightarrow{G'(x)} = v'(x)\,\overrightarrow{f(v(x))} - u'(x)\,\overrightarrow{f(u(x))}}$$

Démonstration. Si $a \in I$ et $\overrightarrow{F(x)} = \int_a^x \overrightarrow{g(t)}\,\mathrm{d}t$; $\overrightarrow{G(x)} = \overrightarrow{F(v(x))} - \overrightarrow{F(u(x))}$ et on applique le théorème de dérivation des fonctions composées. La classe C^1 s'en déduit. □

Remarque 4. *La variable t du symbole $\int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x$ est muette. Elle a le même statut qu'une variable informatique locale à une procédure c'est à dire inconnue en dehors d'elle. De même, il peut y avoir des effets de bords si l'on utilise une notation du type $\int_{u(x)}^{v(x)} \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x$ surtout avec plusieurs variables.*

Remarque 5 (Extension aux fonctions continues par morceaux). *Soit f une application continue par morceaux d'un intervalle I dans E et $a \in I$. Alors l'application $F_a : I \to E$:*

$$x \mapsto \int_a^x \overrightarrow{f(t)}dt$$

est continue sur I. En tout point $x_0 \in I$ qui n'en est pas un plus petit élément resp un plus grand élément, F_a admet une dérivée à gauche resp à droite qui vaut

$$\boxed{\overrightarrow{f(x_0 - 0)} = \lim_{x \to x_0 -} \overrightarrow{f(x)} \qquad \textit{resp} \qquad \overrightarrow{f(x_0 - 0)} = \lim_{x \to x_0 -} \overrightarrow{f(x)}}$$

La preuve se fait par passage aux coordonnées dans une base.

Proposition 13 (Changement de variable). *Etant donnée $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbf{R})$ avec $a = \phi(\alpha) \in I$ et $b = \phi(\beta) \in I$, alors :*

$$\boxed{\int_a^b \overrightarrow{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \overrightarrow{f(\phi(t))}\phi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. On se ramène aux fonctions numériques par choix d'une base. □

Remarque 6 (Extension aux fonctions continues par morceaux). *dans le cas où f est simplement continue par morceaux sur I, il est conseillé de se ramener au cas précédent en considérant une subdivision de $\phi([\alpha, \beta])$*

4 Inégalité des accroissements finis et applications

Proposition 14 (Inégalité des accroissements finis). *On suppose $a < b$. Si $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ vérifient l'hypothèse :*

$$\boxed{\forall t \in]a, b[,\ ||\overrightarrow{f'(t)}|| \ \leq\ g'(t) \quad (3)}$$

Alors :

$$\boxed{||\overrightarrow{f(b)} - \overrightarrow{f(a)}|| \leq g(b) - g(a)}$$

Démonstration. f et g sont de classe C^1 sur $]a, b[$, on peut donc écrire, pour $a < x < y < b$:

$$||\overrightarrow{f(y)} - \overrightarrow{f(x)}|| = \left|\left|\int_x^y \overrightarrow{f'(t)}\,\mathrm{d}t\right|\right| \leq \int_x^y ||\overrightarrow{f'(t)}||\,\mathrm{d}t \leq \int_x^y g'(t)\,\mathrm{d}t = g(y) - g(x)$$

puisque les bornes sont dans le bon sens. Le résultat voulu se déduit de la continuité de f et g sur $[a, b]$ en passant l'inégalité à la limite lorsque $x \to a$ puis $y \to b$. □

Proposition 15 (Extension). *L'inégalité des accroissements finis subsiste lorsque f et g sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ à condition de remplacer L'hypothèse (3) par la suivante : il existe une subdivision $(a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$, simultanément adaptée à f et g telle que :*

$$\boxed{\forall t \in [a, b] - \{t_0, t_1, \ldots, t_n\},\ ||\overrightarrow{\mathrm{D}\, f(t)}|| \ \leq\ \mathrm{D}\, g(t) \quad (4)}$$

Démonstration. Soit $(t_0, \ldots, t_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et g satisfaisant l'hypothèse (4) ci dessus. Il existe des applications $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$, avec $f_i \in \mathcal{C}^1([t_{i-1}, t_i], E)$ et $g_i \in \mathcal{C}^1([t_{i-1}, t_i], \mathbf{R})$ telles que :

$$\boxed{\forall t \in]t_{i-1}, t_i[,\ \overrightarrow{f_i(t)} = \overrightarrow{f(t)} \ \text{ et } \ g_i(t) = g(t)}$$

Il en résulte que $||\overrightarrow{f_i'(t)}|| \leq g_i'(t)$ sur $]t_{i-1}, t_i[$ d'où, d'aprés l'inégalité des accroissements finis ci-dessus *[proposition 14]* dont f_i et g_i vérifient les hypothèses :

$$\boxed{||\overrightarrow{f_i(t_i)} - \overrightarrow{f_i(t_{i-1})}|| \leq g_i(t_i) - g_i(t_{i-1})}$$

Comme f et g sont continues sur $[a,b]$, il vient $\overrightarrow{f_i(t_i)} = \overrightarrow{f(t_i)}$ et $\overrightarrow{f_i(t_{i-1})} = \overrightarrow{f(t_{i-1})}$, de même pour g donc :

$$||\overrightarrow{f(t_i)} - \overrightarrow{f(t_{i-1})}|| \leq g(t_i) - g(t_{i-1})$$

En sommant, il vient :

$$\boxed{||\overrightarrow{f(b)} - \overrightarrow{f(a)}|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\overrightarrow{f(t_i)} - \overrightarrow{f(t_{i-1})}|| \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_i) - g(t_{i-1}) = g(b) - g(a)}$$

□

Remarque 7 (Interprétation cinématique). *Si un mobile va moins vite qu'un autre, la distance qu'il parcours dans le même laps de temps est moins grande.*

Théorème 2. *Si f est une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si f' admet une limite en a, alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$.*

Démonstration. Ce résultat a déja été vu comme conséquence du théorème des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles (th de la limite de la dérivée). Le cas vectoriel peut s'en déduire par passage aux coordonnées. Donnons en une preuve directe. Supposons $\lim\limits_{x\to a^+} \overrightarrow{f'(x)} = \overrightarrow{0}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $a + \alpha < b$ et :

$$\forall x \in]a, a+\alpha[\ ,\ ||\overrightarrow{f'(x)}|| < \epsilon$$

Fixons $x \in]a, a+\alpha[$ et $u \in]a, x[$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction vectorielle f et à la fonction réelle g :

$$t \mapsto \epsilon t$$

qui sont continues sur $[a,x]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]a,x[$, assure que :

$$||\overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(a)}|| \leq \epsilon(x-a)$$

x étant libre dans $]a, a+\alpha[$ et ϵ arbitraire, on a prouvé :

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists \alpha > 0\ ,\ x \in]a, a+\alpha[\cap I \Rightarrow ||\overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(a)}|| \leq \epsilon(x-a)$$

donc $\overrightarrow{f'(a)} = \overrightarrow{0}$. La continuité de f' sur $[a,b]$ est alors immédiate. Si $\lim\limits_{x\to a^+} \overrightarrow{f'(x)} = \overrightarrow{m}$, on applique ce qu'on vient de prouver à la fonction auxiliaire :

$$x \mapsto \overrightarrow{f(x)} - x\overrightarrow{m}$$

□

Proposition 16 (Extension aux dérivées successives). *Si f est une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b]$ et si, pour $1 \leq r \leq n$, $D^r f$ admet une limite en a, alors f est de classe C^n sur $[a,b]$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur r, en appliquant le théorème précédent à $D^r f$. □

Proposition 17 (Exemple d'application :Méthode de Newton). *Soit I un segment, $f \in C^2(I, \mathbf{R})$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, et que $f(a) = 0$. Les fonctions f' et f" sont bornées sur le compact I puisqu'elles y sont continues. Notons :*

$$m_1 = \inf_{x\in I} |f'(x)| \quad M_2 = \sup_{x\in I} |f"(x)|$$

$m_1 > 0$ puisqu'elle est atteinte. Soit ϕ l'application de I dans $\mathbf{R}$ définie, pour $x \in I$ par :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Alors $\phi \in C^1(I, \mathbf{R})$ et, pour tout $x \in I$:

$$|\phi(x) - a| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x-a)^2 \tag{5}$$

En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que $J =]a-\eta, a+\eta[$ soit inclus dans I et stable par ϕ. La suite récurrente (x_n) définie par :

$$x_0 \in J \quad \textit{et, pour } n \geq 0,\ x_{n+1} = \phi(x_n)$$

dont tous les termes sont dans J, converge vers a, de plus, il existe deux constantes $A > 0$ et $k \in]0,1[$ telles que :

$$\forall n,\ |x_n - a| \leq Ak^{(2^n)}$$

Donc, si x_0 est choisi suffisamment près de a, la suite (x_n) converge "très vite" (ce qui n'a aucune signification scientifique) vers a.

Démonstration. Soit $x \in I$, posons $g(x) = (x-a)f'(x) - f(x)$. Il vient :

$$\phi(x) - a = \frac{g(x)}{f'(x)}$$

g est de classe C^1 sur I et $g'(x) = (x-a)f''(x)$ donc :

$$|g'(x)| \leq M_2|x-a|$$

En fixant $x > a$ et en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre a et x à g et $t \mapsto \frac{M_2(t-a)^2}{2}$, qui sont C^1 sur $[a,x]$, il vient l'inégalité

$$|g(x)| \leq \frac{M_2(x-a)^2}{2}$$

D'où l'on déduit l'inégalité (5). Raisonnement analogue, si $x < a$, on considère alors l'intervalle $[x,a]$ et les fonctions g et $t \mapsto -\frac{M_2(t-a)^2}{2}$. Comme a est intérieur à I, il existe $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$. $\eta = \min(\frac{2m_1}{M_2}, \alpha)$ (Si f n'est pas affine) convient (vérification laissée aux lecteurs). L'étude de la vitesse de convergence ainsi que des cas courants sera faite en exercice. □

Remarque 8. *Géométriquement, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des x et de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse x_n (faire un dessin).*

Proposition 18. *Soient $f \in C^1(I,E), g \in C^1(I,\mathbf{R})$ et $a \in I$. On suppose $g' \geq 0$ et $f' = o(g')$ au $\mathcal{V}(a)$ c'est à dire :*

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0 \ /\ \forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow ||\overrightarrow{f'(x)}|| \leq \varepsilon g'(x)}$$

Alors :

$$\boxed{||\overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(a)}|| = o\left(|g(x) - g(a)|\right) \ \ au\ \mathcal{V}(a)}$$

Démonstration. Supposons que a n'est pas plus grand élément de I et regardons la situation à droite de a. Soit $\varepsilon > 0$ auquel on associe $\alpha > 0$ tel que $[a, a+\alpha[\subset I$ et :

$$\forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow ||\overrightarrow{f'(x)}|| \leq \varepsilon g'(x)$$

Soit x fixé dans $]a, a+\alpha[$, on a $\forall t \in [a,x], t \in [a, a+\alpha[$ d'où $||\overrightarrow{f'(t)}|| \leq \varepsilon g'(t)$. Les applications f et εg sont C^1 sur $[a,x]$, elles y sont donc justiciables de l'inégalité des accroissements finis. Donc $||\overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(a)}|| \leq \varepsilon(g(x) - g(a))$. Etude analogue à gauche de tout $a \in I$ qui n'en est pas plus petit élément. (On remplace $[a,x]$ par $[x,a]$) □

.

Théorème 3 (Intégration d'un développement limité). *Soit $\phi \in C^1(I,E)$, ϕ' admettant au $\mathcal{V}(a), a \in I$ un développement limité d'ordre n de la forme :*

$$\boxed{\overrightarrow{\phi'(x)} = \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{a_k}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)}$$

Les $\overrightarrow{a_k}$ sont des vecteurs de E. Alors ϕ admet au $\mathcal{V}(a)$ le développement d'ordre $n+1$:

$$\boxed{\overrightarrow{\phi(x)} = \overrightarrow{\phi(a)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\overrightarrow{a_k}}{k+1}(x-a)^k + o\left((x-a)^{n+1}\right)}$$

Démonstration. On applique ce qui précède à droite *resp à gauche* de a aux fonctions C^1 sur I :

$$f\ :\ x \mapsto \overrightarrow{\phi(x)} - \overrightarrow{\phi(a)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\overrightarrow{a_k}}{k+1}(x-a)^k$$

et

$$g\ :\ x \mapsto (x-a)^{n+1} \quad resp \quad (a-x)^{n+1}$$

$f' = o(g')$ d'où $f = o(g)$ au $\mathcal{V}(a)$ □

.

Théorème 4 (Formule de Taylor-Young). *Soit $f \in C^n(I,E), a \in I$. f admet le développement limité suivant appelé développement de Taylor-Young de f au $\mathcal{V}(a)$:*

$$\boxed{\overrightarrow{f(x)} = \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f^{(k)}(a)}\frac{(x-a)^k}{k!} + o\left((x-a)^n\right)}$$

Démonstration. On introduit la fonction :

$$\phi\ :\ x \mapsto \overrightarrow{f(x)} - \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f^{(k)}(a)}\frac{(x-a)^k}{k!}$$

$\phi \in C^n(I,E)$ et $\overrightarrow{\phi^{(k)}(a)} = 0$ pour $\underline{0 \leq k \leq} n$. On a $\phi^{(n)} = o(1)$ au $\mathcal{V}(a)$ d'où, par application récurrente de 3, $\overrightarrow{\phi^{(n-k)}(x)} = o\left((x-a)^k\right)$ au voisinage de a et la formule pour $k = n$. □

Proposition 19 (Application aux courbes paramétrées). *On se place dans un espace affine réel $\mathcal{E}$ dont la direction E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{R}$. Soit $(\gamma) : t \mapsto m(t) : I \to \mathcal{E}$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \geq 1$. Soit $t_0 \in I$, on suppose que,*

$$\boxed{\forall k \in \{1, \ldots, n-1\},\ \overrightarrow{m^{(k)}(t_0)} = \overrightarrow{0} \quad et \quad \overrightarrow{m^{(n)}(t_0)} \neq \overrightarrow{0}}$$

alors l'arc (γ) admet au point de paramètre t_0 une tangente dirigée par $\overrightarrow{m^{(n)}(t_0)}$.

Démonstration. On prouve l'existence d'une demi-tangente à gauche et à droite en $m(t_0)$. Par exemple à droite, en supposant que $]t_0, +\infty[\cap I \neq \emptyset$. On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre n, au point t_0, à la fonction vectorielle $f : I \to E$ définie par : $t \mapsto \overrightarrow{m(t_0)m(t)}$:

$$\boxed{\overrightarrow{f(t)} = \frac{\overrightarrow{f^{(n)}(t_0)}}{n!}(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \overrightarrow{\epsilon(t)}}$$

où $\epsilon : I \to E$ tend vers 0 quand $t \to t_0$. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I \cup]t_0, +\infty[}} \frac{\overrightarrow{f(t)}}{(t-t_0)^n} = \frac{\overrightarrow{f^{(n)}(t_0)}}{n!}}$$

D'où, en vertu de la continuité de la norme :

$$\boxed{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I \cup]t_0, +\infty[}} \left|\left| \frac{\overrightarrow{f(t)}}{(t-t_0)^n} \right|\right| = \left|\left| \frac{\overrightarrow{f^{(n)}(t_0)}}{n!} \right|\right| \neq 0}$$

D'où, en vertu du théorème sur la limite du quotient d'une fonction vectorielle par une fonction scalaire de limite non nulle, $||\overrightarrow{f(t)}||$ ne s'annule pas dans un voisinage de t_0 et :

$$\boxed{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I \cup]t_0, +\infty[}} \frac{\overrightarrow{f(t)}}{||\overrightarrow{f(t)}||} = \frac{\overrightarrow{f^{(n)}(t_0)}}{||\overrightarrow{f^{(n)}(t_0)}||}}$$

[on remarquera que pour la demi-tangente à gauche on aurait un signe $\pm$]. □

5 Intégration par parties et applications

Proposition 20 (Intégration par parties). *Soit $u \in C^1(I, \mathbf{K})$ et $v \in C^1(I, E)$ $a, b \in I$. La formule d'intégration par parties s'écrit :*

$$\boxed{\int_a^b u(t)\overrightarrow{v'(t)}\,\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b u'(t)\overrightarrow{v(t)}\,\mathrm{d}t}$$

Où encore, avec les notations différentielles :

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

C'est encore vrai lorque u et v sont continues sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

Démonstration. uv étant de classe C^1, d'après la proposition 1 on peut intégrer la relation $(uv)' = u'v + v'u$ sous la forme voulue. Même chose lorque u et v sont continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (*cf* cours du début de l'année). □

REMARQUE IMPORTANTE 4. *Lors d'une intégration par parties, on précisera toujours la classe des fonctions qui interviennent sur l'intervalle de travail contenant les bornes d'intégration.*

Exemple 2. *Calculer*

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Les applications arctan et $t \mapsto (t+1)^{-1}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$. On peut donc intégrer par parties sous la forme :

$$I = -\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}((t+1)^{-1}) = -[\arctan(t)(t+1)^{-1}]_0^1 + J$$

$$J = \int_0^1 (t+1)^{-1}\,\mathrm{d}(\arctan(t)) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(1+t^2)}$$

(Achever le calcul). □

Théorème 5 (Formule de Taylor avec reste intégral). *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I. Soit $a \in I$ alors, pour tout point $x \in I$:*

$$\boxed{\overrightarrow{f(x)} = \overrightarrow{T_n(x)} + \overrightarrow{R_n(x)}}$$

avec :

$$\boxed{\overrightarrow{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f^{(k)}(a)} \frac{(x-a)^k}{k!}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_n(x)} = \int_a^x \overrightarrow{f^{(n+1)}(t)} \frac{(x-t)^n}{n!} \,\mathrm{d}t}$$

Démonstration. Posons pour $0 \leq k \leq n$:

$$\overrightarrow{I_k} = \int_a^x \overrightarrow{f^{(k+1)}(t)} \frac{(x-t)^k}{k!} \,\mathrm{d}t$$

Les applications $f^{(n)}$ et $t \mapsto \frac{(x-t)^k}{k!}$ sont continues sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. On peut donc, pour $k \geq 1$, intégrer par parties :

$$\overrightarrow{I_k} = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} \,\mathrm{d}\left(\overrightarrow{f^{(k)}(t)}\right) = \left[\overrightarrow{f^{(k)}(t)} \frac{(x-t)^k}{k!}\right]_a^x + \overrightarrow{I_{k-1}}$$

Ce qui s'écrit :

$$\overrightarrow{I_{k-1}} - \overrightarrow{I_k} = \frac{\overrightarrow{f^{(k)}(a)}}{k!}(x-a)^k$$

$\overrightarrow{I_0} = \overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(a)}$, puisque f est de classe C^1 sur I. En sommant ces relations pour $1 \leq k \leq n$, on obtient la formule. □

Théorème 6 (Inégalité de Taylor Lagrange). *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I. Soient a, b des éléments de I, $||f^{(n+1)}||$ étant continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, elle y admet une borne supérieure M. Il vient alors :*

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{f(b)} - \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f^{(k)}(a)} \frac{(b-a)^k}{k!}\right\| \leq M \left|\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}$$

Démonstration. Si $a = b$ c'est clair, si $a < b$:

$$\left\|\int_a^b \overrightarrow{f^{(n+1)}(t)} \frac{(b-t)^n}{n!} \,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \left\|\overrightarrow{f^{(n+1)}(t)} \frac{(b-t)^n}{n!}\right\| \,\mathrm{d}t$$

Par croissance de l'intégrale ($a < b$), cette dernière est majorée par :

$$\int_a^b M \frac{(b-t)^n}{n!} \,\mathrm{d}t = M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Calcul analogue pour $b < a$ en intervertissant les bornes des intégrales majorantes. □

Remarque 9 (Contextes d'utilisation de ces formules). *La formule de Taylor avec reste intégral, l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité de Taylor-Lagrange, sont des formules globales, permettant des majorations explicites et quantitatives (par exemple majorations d'erreurs). Au contraire la formule de Taylor-Young est locale et qualitative.*

Exemple 3. *L'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à l'ordre $2n+2$ à la fonction sinus entre 0 et $x \neq 0$ s'écrit :*

$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Car toutes les dérivées du sinus sont, en valeurs absolues, majorées par 1 sur $\mathbf{R}$. Comme

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

On en déduit la convergence de la série de terme général $(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et sa somme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$$

et ce, pour tout x réel puisque c'est clair si $x = 0$. En revanche, l'utilisation de la formule de Taylor-Young pour prouver le même résultat donnerait lieu à un raisonnement faux, laissant penser qu'il en est de même pour toute fonction de classe C^∞. Considérons la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

On a vu que $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$. La série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ est donc convergente, de somme égale à 0 et non à $f(x)$ comme on *eût pu le penser à tort. La formule de Young affirme simplement que,* **pour** n **fixé**, *l'application*

$$\epsilon_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \begin{cases} \epsilon_n(x) = \frac{f(x)}{x^n} & si \;\; x \neq 0 \\ \epsilon_n(0) = 0 \end{cases}$$

est continue en 0*, elle ne permet pas de majorer* $\epsilon_n(x)$ *en fonction de* n *pour un* x *donné, pas plus qu'elle ne permet de prévoir le comportement asymptotique de la suite* $(\epsilon_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$*. Si on fait un calcul direct, on s'aperçoit que, dans cet exemple :*

$$\forall x \in]0,1[, \lim_{n\to\infty} \epsilon_n(x) = +\infty$$

Les lecteurs traceront le graphe de ϵ_n *et étudiera la suite de terme général :*

$$u_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\epsilon_n(x)|$$

Deuxième partie

Applications et compléments

Dans cette partie on ne met pas de flêche sur les vecteurs de $\mathbf{R}^n$

6 Étude locale en un point critique d'une application d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$

Exemple 4 (Pratique de l'étude locale). *cf cours*

Théorème 7. *Le produit scalaire canonique sur* $\mathbf{R}^n$ *est noté* $(\,|\,)$*, la norme euclidienne associée est notée* $||\;\;||$*. On identifie une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *et son endomorphisme canoniquement associé.*
Soit f *une application de classe* $\mathcal{C}^2$ *d'un ouvert* $U \subset \mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}$*. Soit* $a \in U$ *un point critique de* f*. Notons* $H(a)$ *l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice hessienne de* f *en* a*, également notée* $H(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{1\leq i,j\leq n}$*.*

Soit $U_a = \{h \in \mathbf{R}^n \;/\; a+h \in U\}$*. Pour* $h \in U_a$*, on a le développement limité d'ordre* 2 *suivant :*

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\,(h|H(a).h) + ||h||^2\,\epsilon_a(h)}$$

avec $\boxed{\lim_{h\to 0} \epsilon_a(h) = 0}$.

Démonstration. Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, posons :

$$\boxed{|||S||| = \sup_{||h||=1} |{}^t hSh| = \sup_{||h||=1} |(h|Sh)| = \sup_{||h||\neq 0} \frac{|(h|Sh)|}{(h|h)}}$$

dont l'existence est assurée par la compacité de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ et par la continuité de l'applications bilinéaire $(h,k) \mapsto (h|Sk)$ et de l'application linéaire $h \mapsto (h,h)$ en dimension finie, qui entraînent celle de $h \mapsto (h|Sh)$. On prouve aisément que $|||\;\;|||$ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et que $|(h|Sh)| \leq |||S|||.||h||^2$.
L'application de U dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ définie par $x \mapsto H(x)$ est continue car ses composantes dans la base naturelle de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ le sont. Soit $\epsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que :

$$\boxed{||h|| < \delta \Rightarrow h \in U_a \;\text{ et }\; |||H(a+h) - H(a)||| < \epsilon}$$

Fixons un tel h et appliquons la formule de taylor intégral à l'ordre 2 à la fonction $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $\phi(t) = f(a+th)$ entre 0 et 1.

$$\boxed{\phi'(t) = \mathrm{d}f(a+th).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th)\,h_j}$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur U. La dérivation de cette formule donne donc :

$$\boxed{\phi''(t) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\,h_i h_j = (h|H(a+th).h)}$$

Comme a est un point critique de f, il vient $\phi'(0) = \mathrm{d}f(a).h = 0$ d'où :

$$\boxed{f(a+h) = \phi(1) = f(a) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\,(h|H(a+th).h))\;\mathrm{d}t}$$

or :

$$\left|\int_0^1 (1-t)\,(h|H(a+th).h))\;\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)\,(h|H(a).h))\;\mathrm{d}t\right|$$

$$\leq \int_0^1 (1-t)\,|(h|(H(a+th)-H(a)).h)|\;\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_0^1 (1-t)|||H(a+th)-H(a)|||.||h||^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)\epsilon\,||h||\,\mathrm{d}t = \frac{\epsilon\,||h||^2}{2}$$

donc $|\epsilon_a(h)| < \epsilon$ ce qui prouve le développement limité voulu. □

Proposition 21. *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus :*

- *Si $H(a)$ est définie positive resp négative alors a est un minimum resp un maximum local.*
- *Si h est un vecteur propre de $H(a)$ associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$ alors f admet un minimum ou un maximum local* **dans la direction de** *h suivant que $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$.*

Démonstration. Contentons nous de traiter le cas où $H(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, le reste est à l'avenant.
Si $\lambda > 0$ est la plus petite valeur propre de $H(a)$, il vient :

$$(h|H(a).h) \geq \lambda\,(h|h)$$

D'où, en choisissant $||h||$ assez petit pour que $|\epsilon_a(h)| \leq \frac{\lambda}{2}$:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(h|H(a).h) + ||h||^2\,\epsilon_a(h) \geq 0$$

ce qu'on voulait. □

7 Morphismes continus de R dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$

Théorème 8. *Soit $t \mapsto M(t)$ un morphisme continu du groupe $(\mathbf{R},+)$ dans le groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}),\times)$ ie :*

$$\boxed{\forall s,t \in \mathbf{R},\; M(s+t) = M(s)M(t)}$$

alors M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$), $M(t)x$ est la valeur à l'instant t de l'unique solution

$X : t \mapsto X(t)$ du problème de Cauchy :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = M'(0)X \\ X(0) = x \end{cases}}$$

Démonstration. On utilise une technique du type "intégrer pour dériver". $M(0)^2 = M(0)$ donc, puisque $M(0)$ est inversible, $M(0) = \mathrm{I}_n$. De plus, d'après la proposition 11 :

$$\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\int_0^h M(t)\,\mathrm{d}t = M(0) = \mathrm{I}_n}$$

De la continuité du déterminant on déduit :

$$\exists \delta > 0 \;/\; \forall t \in]0,\delta[,\; \det\left(\frac{1}{h}\int_0^h M(t)\,\mathrm{d}t\right) > \frac{1}{2}$$

Fixons $h \in]0,\delta[$ donc $\int_0^h M(s)\,\mathrm{d}s$, notée U, est inversible, soit $t \in \mathbf{R}$:

$$\int_0^h M(t+s)\,\mathrm{d}s = \int_0^h M(t)M(s)\,\mathrm{d}s$$

qui vaut, d'après la proposition 4, exemple 1, $M(t)\int_0^h M(s)\,\mathrm{d}s$. En faisant le changement de variable $t+s = x$ dans l'intégrale de gauche, il vient :

$$\boxed{\int_t^{t+h} M(x)\;\mathrm{d}x = M(t)\int_0^h M(s)\,\mathrm{d}s}$$

et donc :

$$M(t) = \left(\int_t^{t+h} M(x)\;\mathrm{d}x\right)U^{-1}$$

qui, par récurrence sur n, est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n.
Fixons alors $t \in \mathbf{R}$. Les deux fonctions $s \mapsto M(s+t)$ et $s \mapsto M(s)M(t)$ sont égales et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ donc susceptibles d'un développement de Taylor-Young *cf th 4* d'ordre 1 au voisinage de 0. Il existe donc deux applications ϵ_1

et $\epsilon_2 : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, **tendant vers** 0 **quand** $s \to 0$, telles que, pour tout réel s :

$$\boxed{M(t) + M'(t)s + s\epsilon_1(s) = [M(0) + M'(0)s + s\epsilon_2(s)]\, M(t)}$$

Compte tenu de $M(0) = \mathrm{I}_n$, il reste, pour $s \neq 0$:

$$\boxed{M'(t) + \epsilon_1(s) = M'(0)M(t) + \epsilon_2(s)M(t)}$$

En faisant tendre s vers 0, la continuité du produit matriciel assure :

$$\boxed{M'(t) = M'(0)M(t)}$$

Posons alors $A = M'(0)$ et $X(t) = M(t).x$. Il vient :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}.x = AM(t).x = AX(t) \\ X(0) = M(0).x = x \end{cases}}$$

□

Remarque 10. *La réciproque de ce résultat (invariance des trajectoires par translation) a été établie dans le cours sur les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*

Voici un exercice d'application de ce résultat qui fait revoir beaucoup de questions.

Exercice 2 (Sous espaces de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ stables par les translations). *Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie n de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ stable par translation c'est-à-dire :*

$$\forall f \in E,\ \forall a \in \mathbf{R},\ T_a(f) \in E$$

où $T_a(f)$ est la fonction $x \mapsto f(x+a)$. On notera encore T_a l'endomorphisme induit par T_a sur E. On note $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E.

1. *Montrer par récurrence qu'existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que :*

$$\det\left[f_i(x_j)\right]_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$$

2. *Soit $M(s)$ la matrice de T_s dans la base $(f_1, \dots, f_n)$. Á l'aide des formules de Cramer, démontrer que l'application $s \mapsto M(s)$ est continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'elle vérifie les hypothèses du théorème 8. En déduire que $E \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.*
3. *Montrer que E est stable par limite simple. En déduire qu'il est stable par dérivation. Soit D l'endomorphisme induit sur E par la dérivation.*
4. *Á l'aide d'un polynôme annulateur de D, dont on justifiera l'existence, démontrer que E est exactement l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.*