INTÉGRALES DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

JPB

17 décembre 2008

Table des matières

LES SEULES DÉMONSTRATIONS AU PROGRAMME SONT CELLES QUI ONT ÉTÉ FAITES DANS LE COURS SUR LES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS. Les preuves des résultats hors programmes sont difficiles et se trouvent sur mon site. Les preuves des résultats non exigibles sont abrégées et peuvent faire l'objet d'exercices d'approfondissement. Il est conseillé de lire le programme officiel en même temps que ce papier.

Première partie
Rappels et notations

1 Notations

– La lettre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
– La lettre I (*resp* J) désignera toujours un intervalle *quelconque* (*resp un segment*) non réduit à un point.
– On note $\mathcal{C}_m(I,\mathbf{R})$ (*resp* $\mathcal{C}_m(I,\mathbf{C})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles (*resp* complexes). Tous ces ensembles sont stables par produit.
– Pour $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbf{C})$ intégrable, on posera $N_1(f) = \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$. On rappelle (mais ça n'a pas vraiment d'intérêt dans ce cours), que N_1 est une semi-norme sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, continues par morceaux, intégrables sur I et une norme sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, continues et intégrables sur I.

2 Rappels

2.1 Sur les fonctions d'une variable

Proposition 1 (Critère séquentiel des limites). *Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{K}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point de I ou une extrémité de I. soit $l \in \mathbf{K}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

ii) *Pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers l.*

iii) *Pour toute suite* **monotone** *(x_n) d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers l.*

Ce résultat est encore valable si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $l = \pm\infty$.

Proposition 2 (Caractère local de la continuité). *Soit f une fonction de I dans $\mathbf{K}$. Si la restriction de f à chaque segment de I est continue sur ce segment alors f est continue sur I.*

Proposition 3 (Caractère local de la classe $\mathcal{C}^1$). *Soit f une fonction de I dans $\mathbf{K}$. On suppose qu'existe une fonction g continue de I dans $\mathbf{K}$ telle que pour tout segment $J \subset I$, $f_{|J}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et de dérivée $g_{|J}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^I$ sur I et $f' = g$.*

Proposition 4. *Théorème "de la limite de la dérivée" à revoir sur le papier "dérivées" ou dans le cours de première année.*

Deuxième partie
Interversion intégrale-suite de fonctions

3 Le théorème de convergence dominée

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée, preuve hors programme). *Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_m(I,\mathbf{C})$, on suppose que :*
– *Il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_m(I,\mathbf{R})$, intégrable sur I, à valeurs positives, telle que :*
$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbf{N},\ |f_n(x)| \le g(x)$$
(On dit alors que la suite (f_n) est dominée par la fonction intégrable g),
– *la suite (f_n) converge simplement vers un élément $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbf{C})$.*

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et :
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Contre-exemple 1. *[Importance de l'hypothèse de domination] Soit f_n la fonction dont le graphe dans $\mathbf{R}^2$ est la ligne polygonale qui joint, dans cet ordre, les quatre points*
$$O = (0,0),\ A_n = \left(\frac{1}{2(n+1)}, 2(n+1)\right),\ B_n = \left(\frac{1}{n+1}, 0\right),\ C = (1,0)$$
La suite (f_n) est une suite de fonctions continues sur $I = [0,1]$ qui converge simplement vers 0. Pourtant le terme général de la suite $(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x)$ vaut constamment 1.

Exemple 1. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :*

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur cet intervalle. Il vient :

–
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

– *Cette dernière fonction, notée f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. f_n est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x \geq 0$ fixé :

$$\ln f_n(x) = -n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \to -x^2 \text{ quand } n \to \infty.$$

Donc la suite f_n converge simplement vers f sur $[0, +\infty[$.
La fonction ϕ définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$u \mapsto \ln(1 + ux)$$

est concave pour $x > 0$. Donc la fonction $u \mapsto \frac{\phi(u)}{u}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (pente). On en déduit aisément, par croissance de l'exponentielle que, pour $x > 0$ fixé, la fonction de t, définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$t \mapsto \left(1 + \frac{x^2}{t}\right)^{-t}$$

est décroissante et donc que :

$$\forall x > 0,\ 0 \leq f_n(x) \leq f_1(x)$$

C'est évident pour $x = 0$ et donc :

$$\forall x \geq 0,\ |f_n(x)| \leq f_1(x)$$

Or f_1 est intégrable sur $[0, +\infty[$, le théorème de convergence dominé s'applique donc et assure le résultat. □

Exercice 1. *Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ grâce au changement de variable :*

$$x = \sqrt{n}\ \mathrm{tg}\, t$$

En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

Exercice 2 (La fonction Γ). -

1. *Soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$. Prouver que la fonction :*

$$x \overset{f}{\mapsto} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}$$

est continue et intégrable sur $I =]0, +\infty[$. On note

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

2. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, définissons la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{s-1}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 < x < n \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. *Établir les propriétés suivantes :*
   (a) *f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ et :*

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{n} x^{s-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{n^s\, n!}{s\,(s+1)\ldots(s+n)},$$

   (b) *pour tout x de cet intervalle :*

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

   (c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s\, n!}{s\,(s+1)\ldots(s+n)} = \Gamma(s)$$

4. *Prouver la relation :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

5. *En déduire la valeur de cette dernière intégrale.*

Exercice 3 (Théorème de De Moivre-Laplace). *Une particule évolue aléatoirement sur un axe de sorte qu'à chaque instant elle se déplace de* ± 1*. Les déplacements vers la gauche et la droite sont équiprobables. On montre que la probabilité* P_m *pour qu'au bout de* m *déplacements, elle se trouve dans l'intervalle :*

$$I_m = \left[\frac{m}{2} + a\sqrt{\frac{m}{2}}\,,\ \frac{m}{2} + b\sqrt{\frac{m}{2}}\right]$$

Où a *et* b *sont deux réels tels que* $a < b$ *vaut, pour* m *suffisamment grand :*

$$P_m = \frac{1}{2^m} \sum_{k \in J_m} \binom{m}{\frac{m+k}{2}}$$

Où J_m *est l'ensemble des* $k \in I_m$ *tels que* $k+m$ *soit pair. On se propose alors de prouver l'estimation asymtotique suivante :*

$$\lim_{m\to\infty} P_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Dans la suite on prouvera (1) lorsque m *est pair* $(m = 2n)$ *et* $a = 0$*.*

1. *Posons :*

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n+k}}{\mathrm{C}_{2n}^{n}} = \dfrac{\binom{2n}{n+k}}{\binom{2n}{n}} & \text{si } 0 \le k \le n \\[2ex] 0 \text{ si } k > n \end{cases}$$

et

$$f_n(t) = a_{n,[t]}, \quad g_n(t) = f_n(t\sqrt{n}) \quad \text{pour } t \ge 0$$

Trouver la limite simple de la suite de fonctions (g_n) *sur* $[0, +\infty[$*.*

2. *Soit* ϕ *la fonction caractéristique de l'intervalle* $[0, b]$*, prouver la relation :*

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}x = (b\sqrt{n} - [b\sqrt{n}]) + a_{n,[b\sqrt{n}]} + \sum_{0\le k\le b\sqrt{n}-1} a_{n,k}$$

3. *En déduire que, lorsque* $n \to \infty$ *:*

$$\sum_{0\le k\le b\sqrt{n}} a_{n,k} \sim \sqrt{n}\int_0^b \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Conclure.

Exercice 4. *On désigne par* γ *la constante d'Euler.*

1. *Soient* $a > 0$ *et* $b > 0$*, prouver l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

2. *En déduire la valeur de :*

$$\int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-nt})\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

3. *Prouver l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \gamma$$

4. *En déduire que, lorsque* x *tend vers* 0 *par valeurs supérieures, la fonction :*

$$x \mapsto \ln x - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

admet une limite que l'on déterminera.

Exercice 5 (Mines). *Retrouver le résultat de l'exercice précédent en calculant de deux façons différentes :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6. *On pose, pour* $n \ge 1$ *:*

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 - x^{1/n}}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ *et un équivalent.*

4 Quelques exemples de comportements asymptotiques

Exemple 2. *Soit $\alpha > 0$. Étudier, quand $x \to 0_+$ et quand $x \to +\infty$ le comportement asymptotique de :*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. -

a) Définition de F Fixons $x > 0$. La fonction :

$$t \mapsto \arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-xt}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 et est dominée par $t \mapsto t^{-2}$ au voisinage de $+\infty$. Elle est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. F est donc définie sur $]0, +\infty[$.

b) Limite quand $x \to +\infty$ Soit (x_n) une suite d'éléments de $[1, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$. Notons :

$$f_n(t) = \arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-x_n t}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ |f_n(t)| \leq \arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-t}$$

qui est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$$

et, comme ce résultat ne dépend pas de la suite (x_n) choisie :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

c) Comportement asymptotique quand $x \to +\infty$ Fixons $x > 0$ et observons que la fonction :

$$t \mapsto \arctan(t^\alpha)\,\mathrm{e}^{-xt}$$

est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ puisqu'elle est dominée par t^{-2} au voisinage de $+\infty$. Il vient donc, *via* la relation :

$$\arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-xt} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-xt} - \arctan(t^\alpha)\,\mathrm{e}^{-xt}$$

et, vu l'intégrabilité des deux fonctions du membre de droite sur $]0, +\infty[$:

$$F(x) = \frac{\pi}{2x} - G(x) \quad \text{avec} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(t^\alpha)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

En faisant dans $G(x)$ le changement de variable affine $u = xt$, il vient :

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{u^\alpha}{x^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

or, à $u > 0$ fixé on a, quand $x \to +\infty$:

$$\arctan\left(\frac{u^\alpha}{x^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-u} \sim \frac{u^\alpha}{x^\alpha}\,\mathrm{e}^{-u}$$

et, comme la fonction $u \mapsto u^\alpha\,\mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, cela incite à regarder le comportement de :

$$H(x) = x^{1+\alpha}\,G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\left[x^\alpha \arctan\left(\frac{u^\alpha}{x^\alpha}\right)\right] \mathrm{d}u$$

quand $x \to +\infty$. On considère la même suite (x_n) que précédemment et on introduit la suite de fonctions (h_n) définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$h_n(u) = \mathrm{e}^{-u}\left[x_n^\alpha \arctan\left(\frac{u^\alpha}{x_n^\alpha}\right)\right]$$

et :

$$h(u) = u^\alpha\,\mathrm{e}^{-u} = \lim_{n\to\infty} h_n(u)$$

Les h_n et h sont continues sur $[0, +\infty[$, intégrables sur cet intervalle. Or, pour $s \geq 0$, $0 \leq \arctan s \leq s$ par concavité de cette fonction sur $[0, +\infty[$ (le graphe est sous la tangente en 0) donc $|h_n(u)| \leq h(u)$ pour tout u et tout n et le théorème de convergence dominée assure que :

$$\lim_{n\to\infty} H(x_n) = \int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$$

En notant I cette dernière intégrale, le critère séquentiel de convergence assure que $\lim_{x\to\infty} H(x) = I$ et donc :

$$F(x) = \frac{\pi}{2x} + \frac{I}{x^{1+\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{1+\alpha}}\right) \quad \text{quand} \quad x \to +\infty$$

d) Limite en 0_+ Soit x_n une suite de réels strictement positifs et décroissante qui tend vers 0. Notons f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \mathrm{e}^{-x_n t}$$

f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ et la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ **en croissant** vers f définie par :

$$f(t) = \arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

qui est continue sur $]0, +\infty[$. Il vient donc, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t > 0$:

$$0 \leq f_n(t) \leq f(t) \quad \text{donc} \quad |f_n(t)| \leq f(t) \tag{2}$$

Donc, si f est intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui n'a lieu que si $\alpha > 1$, Le théorème de convergence dominée et le critère séquentiel des limites fournissent :

$$\text{si } \alpha > 1 \ \lim_{x\to 0_+} F(x) = \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \mathrm{d}t$$

En revanche, c'est un peu plus délicat si $0 < \alpha \leq 1$. [1] D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(F(x_n))$ possède une limite λ

[1]En première lecture ce cas pourra être omis

finie ou égale à $+\infty$. Fixons un segment $J = [a, b] \subset]0, +\infty[$. Il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}$, puisque la fonction f_n est positive :

$$\int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t \leq F(x_n) \tag{3}$$

D'autre part la domination (2) a lieu sur le segment J sur lequel f est intégrable car continue. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) **sur le segment** J d'où :

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, en passant l'inégalité 3 à la limite :

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t \leq \lambda$$

Mais, comme $f \geq 0$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$ l'ensemble des $\int_J f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas majoré [2] donc $\lambda = +\infty$ et $F(x_n) \to +\infty$. En résumé, le critère séquentiel des limites assure que :

$$\text{si } 0 < \alpha \leq 1 \ \lim_{x\to 0_+} F(x) = +\infty$$

e) Comportement asymptotique au voisinage de 0 -

i) Cas où $0 < \alpha < 1$ On procède comme au **c)**. Le changement de variable $xt = u$ amène à considérer :

$$K(x) = x^{1-\alpha}\,F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \left[\frac{1}{x^\alpha} \arctan\left(\frac{x^\alpha}{u^\alpha}\right)\right] \mathrm{d}u$$

qui, avec les mêmes arguments, tend, quand $x \to 0_+$, vers : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u > 0$ donc :

$$F(x) \sim x^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u \quad \text{quand } x \to 0_+$$

[2]*cf* le cours polycopié sur les fonctions intégrables

ii) Cas où $\alpha = 1$ La méthode précédente ne marche plus car la fonction limite n'est plus intégrable sur $]0,1]$. Il y à donc un problème quand t est au voisinage de l'infini qu'on peut régler, par exemple, en coupant l'intégrale en deux : $F(x) = G(x) + H(x)$ avec :

$$G(x) = \int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

$$H(x) = \int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

Les lecteurs prouveront, en prenant une suite (x_n) qui tend vers 0 que :

$$\lim_{x\to 0_+} G(x) = \int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \ \text{ notée } I$$

quant à $H(x)$, on enlève à l'arc tangente une fonction plus simple qui a le même comportement en $+\infty$ (suppression de la singularité) à savoir la fonction :

$$K(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\, \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\, \mathrm{d}u$$

On forme donc

$$L(x) = K(x) - H(x) = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right] \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

qui, d'après le critère séquentiel et le théorème de convergence dominée, tend, quand $x \to 0_+$ vers :

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right] \mathrm{d}t \ \text{ notée } J$$

d'où, quand $x \to 0_+$:

$$F(x) = K(x) + I - J + o(1)$$

enfin, on prouve en lui retranchant la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ qu'existe une constante λ telle que quand $x \to 0_+$:

$$K(x) = -\ln x + \lambda + o(1)$$

donc il existe une constante μ telle que quand $x \to 0_+$:

$$F(x) = -\ln x + \mu + o(1)$$

□

Exemple 3. *Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$. Étudier le comportement asymptotique de la suite :*

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n f(t)}{\sqrt{1-t}}\, \mathrm{d}t$$

Troisième partie
Interversion série-intégrale

5 Cas des séries normalement convergentes de fonctions continues sur un segment

On rappelle d'abord le théorème vu dans le chapitre "suites de fonctions" dont la preuve doit être connue.

Proposition 5. *Si (u_n) est une suite de fonctions continues sur un segment $J = [a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$, et si la série $\sum u_n$ converge normalement sur J vers une fonction U. Alors :*

- *la fonction U est continue sur J,*
- *la série de terme général $\int_J u_n$ converge et sa somme vaut $\int_J U$.*

En particulier, la série $\sum N_1(u_n)$ converge puisque

$$0 \le N_1(u_n) \le (b-a) N_\infty(u_n)$$

et :

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} N_1(u_n)$$

Il suffit, pour l'établir, de passer à la limite l'inégalité :

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right) \le \sum_{n=0}^{N} N_1(u_n)$$

quand $N \to \infty$ puisqu'en notant U_N la somme partielle de rang N :

$$0 \le |N_1(U_N) - N_1(U)| \le N_1(U_N - U) \le (b-a) \sum_{n=N+1}^{\infty} N_\infty(u_n).$$

Exemple 4. *p et q sont des naturels. Calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q \, \mathrm{d}t$ et en déduire la valeur de :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Démonstration. Une intégration par parties, licite car les fonctions considérées sont $\mathcal{C}^1$ sur le **segment** $[0,1]$, amène :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1} \quad \text{pour } q > 0$$

D'où, par récurrence sur q :

$$I_{p,q} = \frac{q!}{(p+1)\dots(p+q+1)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

En prenant $p = q = n$, il vient :

$$I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Considérons alors la série de fonctions $\sum u_n$, u_n étant la fonction définie et continue sur $[0,1]$ par :

$$u_n(t) = t^n(1-t)^n$$

L'étude des variations de u_1 sur $[0,1]$ amène :

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |t(1-t)| = \frac{1}{4}$$

et donc :

$$N_\infty(u_n) = \frac{1}{4^n}$$

Donc la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$, sa somme U est continue sur $[0,1]$ et l'on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 U(t) \, \mathrm{d}t$$

Le théorème affirmant la convergence de la série du premier membre, il n'est nul besoin de la vérifier. D'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

(Les lecteurs sont invités à vérifier le calcul) □

Il y a d'autres exemples dans le papier sur les séries entières.

Exercice 7. *Développer en série entière, sur un intervalle à préciser, la fonction :*

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1 + x\sin^2 t\right) \, \mathrm{d}t$$

Remarque 1 (Importance du segment). *Ce théorème est en défaut pour une série de fonctions continues et intégrables sur un intervalle quelconque. Si l'on prend :*

$$u_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t/n^2}}{n^2} \qquad \textit{pour } n \geq 1,\ t \geq 0,$$

la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ mais, pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{+\infty} u_n(t) \, \mathrm{d}t = 1$; la série $\sum_{n \geq 1} I_n$ ne saurait donc converger.

6 Cas des séries de fonctions intégrables sur un intervalle quelconque

Théorème 2 (Théorème "N_1" dit "de convergence dominée pour les séries de fonctions". Preuve hors programme). *Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_m(I,\mathbf{C})$ telle que :*

- *pour tout entier n, u_n est intégrable sur I,*
- *la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbf{C})$,*
- *la série de terme général $N_1(u_n) = \int_I |u_n|$ converge.*

Alors :

- *f est intégrable sur I,*
- *$N_1(f) \leq \sum_0^\infty N_1(u_n)$,*
- *la série de terme général $\int_I u_n(x) \, \mathrm{d}x$ converge et :*

$$\int_I f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_0^{+\infty} \int_I u_n(x) \, \mathrm{d}x$$

6.1 Utilisation courante

Exemple 5. *Écrire sous forme de la somme d'une série :*

$$\int_0^1 \frac{\ln t\,\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. La fonction f, définie sur l'intervalle $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t\,\ln(1+t)}{t}$$

est continue.

1) Développement de f en série On rappelle que, pour $t \in]-1,1[$, $\ln(1+t)$ est somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$.

On en déduit que, pour $0 < t < 1$, $f(t)$ est somme de la série convergente :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,t^n\,\ln t}{n+1}$$

Considérons donc la série de fonctions $\sum u_n$ où u_n est définie sur $]0,1[$ par :

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n\,t^n\,\ln t}{n+1}$$

2) Intégrabilité des u_n u_n est **continue** sur $]0,1[$. Prouvons qu'elle y est **intégrable**.

Pour $n \geq 1$, elle se prolonge par continuité au **segment** $[0,1]$, elle est donc intégrable sur $]0,1[$.

Pour $n = 0$ c'est l'intégrabilité habituelle de ln. Posons :

$$I_n = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

3) Calcul de I_n Par partie, en prenant soin de se ramener à des segments.

Soit $0 < h < 1$. Les fonctions :

$$t \mapsto \ln t \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le **segment** $[h,1]$. Il vient donc :

$$\int_h^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_h^1 - \int_h^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t$$

D'où, après calcul, en faisant tendre h vers 0 :

$$\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

et donc :

$$\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$$

4) Justification de l'interversion -

- Les fonctions u_n sont continues, intégrables sur $]0,1[$.
- La série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonctions f continue sur $]0,1[$.
- $N_1(u_n) = \int_{]0,1[} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = (n+1)^{-3}$ donc la série $\sum \int_{]0,1[} |u_n|$ converge.

On en déduit L'intégrabilité de f sur $]0,1[$ et la relation :

$$\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$$

□

Exemple 6. *Soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > 1$. Montrons que :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La fonction Γ, définie pour $s > 0$ dans l'exercice 2, vaut pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > 0$:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. La fonction $x \overset{f}{\mapsto} \dfrac{x^{s-1}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est continue sur $I =]0,+\infty[$ et, sur cet intervalle, est somme de la série de terme général :

$$u_n : x \mapsto x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}$$

Toutes ces fonctions sont positives, continues, intégrables sur I car, pour tout $x \in I$:

$$|u_n(x)| = x^{\mathrm{Re}(s)-1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)x},$$

fonction continue sur I, positive, intégrable sur $]0,1]$ car équivalente à $x^{\mathrm{Re}(s)-1}$ en 0 et intégrable sur $[1,+\infty[$ car $O(x^{-2})$ en $+\infty$. D'autre part, le changement de variable $(n+1)\,x = t$ amène :

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\,s)}{(n+1)^{\mathrm{Re}\,s}}$$

Or la série de terme général $\frac{\Gamma(\mathrm{Re}\,s)}{(n+1)^{\mathrm{Re}\,s}}$ converge puisque $\mathrm{Re}\,s > 1$. D'où l'intégrabilité de f et l'égalité voulue. □

Voyons comment réagit Maple :

```
y:=x^(s-1)/(exp(x)-1);
```

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$$

```
int(y,x=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

```
z:=subs(s=2,y);
```

$$\frac{x}{e^x-1}$$

```
int(z,x=0..infinity);
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 8. *(X) Pour $x > 0$, on pose :*

$$s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$ et donner un développement de f en une série de fractions rationnelles. En déduire que f est continue sur $]0,+\infty[$ et que, lorsque $x \to 0^+$:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2x}$$

6.2 Cas où l'on ne sait pas évaluer la norme un du terme général de la suite

Exemple 7. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et telle que la fonction :*

$$t \mapsto |f(t)|\,\mathrm{e}^{|t|}$$

soit intégrable sur $\mathbf{R}$. La fonction :

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}\,f(t)$$

est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$. Prouvons alors que la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$, c'est-à dire qu'existe une suite complexe (a_n) telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n\,x^n$ converge pour $x \in]-1,1[$ et que sa somme vaille $\hat{f}(x)$ sur cet intervalle.

Démonstration. L'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}\,f(t)$ sur $]-\infty,+\infty[$ provient de sa continuité par morceaux et de la majoration :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ |\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}\,f(t)| = |f(t)| \leq |f(t)|\,\mathrm{e}^{|t|}$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$.
Le développement en série de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}$ permet d'écrire, pour tout couple (x,t) de réels le développement en série convergente :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}\,f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n\,x^n\,t^n\,f(t)}{n!}$$

Dans la suite, $x \in]-1,1[$ est fixé.
Posons, pour $t \in \mathbf{R}$:

$$u_n(t) = \frac{\mathrm{i}^n\, x^n\, t^n\, f(t)}{n!}$$

1) Intégrabilité de u_n La fonction $t \mapsto u_n(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ car :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ |u_n(t)| \leq \frac{|x|^n |t|^n |f(t)|}{n!} \leq |x|^n |f(t)|\, \mathrm{e}^{|t|}$$

La fonction $|u_n|$ est donc **continue**, **positive**, majorée par une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, elle est donc intégrable sur $\mathbf{R}$.

2) Convergence de $\sum N_1(u_n)$

$$N_1(u_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^n |t|^n |f(t)|}{n!}\, \mathrm{d}t$$

Il ne semble pas très facile de calculer ou de majorer $N_1(u_n)$ de façon efficace. Procédons autrement. Posons :

$$v_n(t) = |u_n(t)| = \frac{|x|^n |t|^n |f(t)|}{n!}$$

v_n est intégrable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) = \mathrm{e}^{|x||t|}\, |f(t)| \leq |f(t)|\, \mathrm{e}^{|t|}$$

La fonction majorante est intégrable sur $\mathbf{R}$, donc aussi la fonction **positive** :

$$t \mapsto \mathrm{e}^{|x||t|}\, |f(t)|.$$

Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et, pour tout $N \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} v_n(t) \leq \mathrm{e}^{|x||t|}\, |f(t)|.$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{N} \int_{\mathbf{R}} v_n(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{|x||t|}\, |f(t)|\, \mathrm{d}t = M$$

Comme il s'agit d'une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par M, la série $\sum_{n\geq 0} \int_R v_n(t)\, \mathrm{d}t$ converge, **ce qu'on voulait**. De surcroît :

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{|xt|}\, |f(t)|\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} v_n(t)\, \mathrm{d}t$$

3) Justification de l'interversion Le théorème 2 s'applique donc à la série de fonctions $\sum u_n$. Il assure La convergence de la série $\sum \int_R u_n(t)\, \mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} u_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\, x}\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

En posant :

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n\, f(t)}{n!}\, \mathrm{d}t$$

La série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\, x}\, f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

□

Exercice 9 (X). *Calculer, sous la forme la plus simple possible :*

$$I_n = \int_a^b \frac{t^n\, \mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$$

en évaluant, pour $|x|$ suffisamment petit, la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} I_n x^n$.

Exercice 10. *Pour quelles valeurs du réel k la suite de terme général :*

$$I_n = \int_0^n \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) \mathrm{e}^{kt}\, \mathrm{d}t$$

est-t-elle convergente ?

Exercice 11. *Soit f une fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$, positive. On suppose l'existence d'un réel $\alpha>0$ tel que la fonction :*

$$t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{xt}$$

soit intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout x de l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$. Prouver que la fonction L définie sur $]-\alpha,\alpha[$ par :

$$L(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{xt}\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

est développable en série entière cf exemple 7 sur cet intervalle et $\ln L$ y est convexe.

Contre-exemple 2 (Importance des hypothèses). *Associons à la suite (f_n) de fonctions du contre-exemple 1, la suite (u_n) de fonctions continues sur $I=[0,1]$ définie par :*

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_1=f_1 \\ u_n=f_n-f_{n-1} & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$$

On prouve alors facilement que :
- *la série $\sum u_n$ converge simplement vers la fonction nulle,*
- *la série $\sum \int_I u_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers 1,*
- *le théorème ci dessus ne s'applique donc pas d'où la divergence de la série $\sum \int_I |u_n(x)|\,\mathrm{d}x$.*

6.3 Cas où le théorème ne s'applique pas

Aussi séduisant que puisse être ce théorème, il ne s'applique pas (du moins directement) dans nombre de situations où les fonctions u_n sont intégrables sur I mais où la série de terme général $N_1(u_n)$ diverge.

Exemple 8 (Centrale 2001). *Existence et signe de :*

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$ et calculer sa somme.

Démonstration. La série converge d'après le critère des séries alternées et le signe de sa somme est celui de $(-1)^{n+1}$. Posons, pour $k\geq 1$ et $t\in[0,1]$:

$$u_k(t)=(-1)^k\,t^{k-1}$$

u_k est une fonction continue donc intégrables sur le segment $[0,1]$ et :

$$\int_0^1 u_k(t)\,\mathrm{d}t=\frac{(-1)^k}{k}.$$

D'autre part, pour $t\in[0,1[$ la série $\sum\limits_{k\geq n+1} u_k(t)$ converge vers $U_n(t)=\dfrac{(-1)^{n+1}\,t^n}{1+t}$. Malheureusement la série de terme général $N_1(u_k)=\dfrac{1}{k}$ diverge. Pour pallier à cet inconvénient on va travailler directement sur la somme partielle de la série de terme général u_k et sur l'intervalle $[0,1[$ où la suite des sommes partielles converge simplement vers la fonction continue U_n. Pour $p\geq n+1$, notons :

$$f_p(t)=\sum_{k=n+1}^{p}u_k(t)=U_n(t)\,(1+(-t)^{p-n-1})$$

Donc, pour tout $t\in[0,1[$:

$$|f_p(t)|\leq 2|U_n(t)|$$

Fonction intégrable sur $[0,1[$ car restriction à cet intervalle d'une fonction continue sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_p)_{p\geq n+1}$:

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^1 f_p(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit encore :

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{(-1)^k}{k}=\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}\,t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement :

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}=\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}\,t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

En réitérant le même raisonnement, on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{1}{2}$$

On aurait également pu grouper les termes deux par deux comme dans l'exemple suivant. □

Exemple 9. *Prenons un autre exemple de série alternée de fonctions :*

$$u_n(x) = (-1)^n \,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x} \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } x > 0$$

Celle ci converge simplement sur $I =]0, +\infty[$ d'après le théorème usuel sur la convergence des séries alternées. Soit f sa somme. Sur tout segment $[a, b] \subset I$, on a l'inégalité :

$$|u_{n+1}(x)| \leq \mathrm{e}^{-\sqrt{n}a}$$

D'où la convergence normale de $\sum u_n$ vers f sur tout segment $\subset I$ et la continuité de f sur I. Dans le but d'appliquer le théorème 2, on calcule :

$$N_1(u_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Malheureusement cette série ne converge pas et le théorème 2 ne peut s'appliquer. *Pourtant la série de terme général $\int_I u_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge comme série alternée. Prouvons, malgré tout, que f est intégrable sur I et :*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

L'idée consiste à accélérer la convergence de la série $\sum u_n$ en groupant deux termes consécutifs. Pour $p \geq 1$, posons, pour $x \in I$:

$$v_p(x) = u_{2p}(x) + u_{2p+1}(x)$$

Les lecteurs prouveront que le théorème s'applique à la série de fonctions de terme général v_p dont la somme est f. Le résultat annoncé s'en déduit.

Exercice 12. *Prouver directement le résultat précédent en utilisant la majoration habituelle du reste d'une série alternée et la technique de l'exemple 8.*

Exercice 13. *Soit R_n le reste de la série harmonique alternée :*

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n^2 = \ln 2$$

On pourra écrire R_n sous forme d'une intégrale et en déduire une expression de :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n R_n x^n}{1+x} \qquad \text{pour } x \in [0, 1[$$

Puis prouver que la somme proposée vaut :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Quatrième partie

Intégrales dépendant d'un paramètre

7 Continuité sous le signe somme

Théorème 3 (Théorème de continuité sous l'intégrale. Démonstration non exigible). *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et vérifiant les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $x \in A$, la fonction partielle $f(x, .)$ définie sur I par :*

  $$t \mapsto f(x, t)$$

  est continue par morceaux sur I.

– *Pour tout $t \in I$, la fonction partielle $f(.,t)$ définie sur A par :*

$$x \mapsto f(x,t)$$

est continue sur A.

– *il existe une fonction ϕ, continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :*

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \phi(t)$$

(Hypothèse de domination)

Alors, pour chaque $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction g définie sur A par :

$$x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur A. **Ce résultat est encore vrai si une hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de** A *(la fonction dominante dépendra, bien sûr, du segment).*

Démonstration. L'intégrabilité de $f(x,.)$, et donc la définition de g, provient de l'hypothèses de domination. Soit $a \in A$ et (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a. La suite (f_n) de fonctions définies sur I par $f_n = f(x_n,.)$ converge simplement vers la fonction $f(a,.)$ et vérifie sur I les hypothèses du théorème de convergence dominée. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$. Le cas d'une domination sur tout segment de A s'en déduit car une fonction de A dans $\mathbf{C}$ dont les restrictions à tous les segments de A est continue est continue sur A. □

Exemple 10. *Pour $x > 0$, on peut définir :*

$$s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t$$

Prouvons directement la continuité de s sur $]0,+\infty[$.

Démonstration. La fonction f définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par :

$$f(x,t) = \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1},$$

vérifie les propriétés suivantes :

– Pour $x > 0$ fixé la fonction $f(x,.)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
– Pour $t > 0$ fixé la fonction $f(.,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
– On se place sur un segment $[a,b]$ avec $0 < a < b$. Pour $t \in]0,+\infty[$ et $x \in [a,b]$:

$$\left|\frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\right| \leq \frac{|\sin t|}{\mathrm{e}^{at} - 1} = \phi(t)$$

ϕ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, prouvons qu'elle y est intégrable.

1) Intégrabilité sur $]0,1]$: ϕ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ car :

$$\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = \frac{1}{a}$$

2) Intégrabilité sur $[1,+\infty[$ **:** Elle provient de ce que, sur cet intervalle :

$$\phi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Le théorème 3 avec domination sur tout segment prouve donc l'intégrabilité, pour tout $x > 0$, de $t \mapsto f(x,t)$ et la continuité sur $]0,+\infty[$ de :

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

□

Exemple 11. *Pour $x \in \mathbf{R}$, l'intégrale :*

$$\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\mathrm{d}\,\theta$$

existe. Si on note $f(x)$ sa valeur, la fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. -

Définition de f sur $\mathbf{R}$: Notons u l'application de $\mathbf{R}\times[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$u(x,\theta) = x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta,$$

est donc positive et ne peut s'annuler que pour $\sin\theta = (x - \cos\theta) = 0$ soit :

$$(x,\theta) = (1,0) \qquad \text{ou} \qquad (x,\theta) = (-1,\pi).$$

Donc, pour $x \neq \pm 1$, l'application $\ln \circ u(x,.)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ donc intégrable. Pour $x = 1$, la fonction $v : \theta \mapsto \ln(2(1-\cos\theta))$ est définie et continue sur $]0,\pi]$ et, au voisinage de 0 :

$$v(\theta) \sim 2\ln\theta$$

qui est négative et intégrable sur $]0,1]$ donc v aussi. On fait une étude analogue pour $x = -1$ ce qui clôt la définition de f.

Continuité de f sur $\mathbf{R}$: Enfin d'englober simultanément les cas $x = \pm 1$ et les autres dans une même étude, on va considérer maintenant la fonction ϕ définie sur $\mathbf{R}\times]0,\pi[$ par :

$$\phi(x,\theta) = \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1).$$

Vérifions que ϕ satisfait les hypothèses du théorème de continuité dominée sur tout segment :

i) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ l'application $\phi(x,.)$ est continue sur $]0,\pi[$.

ii) Pour tout $\theta \in]0,\pi[$ l'application $\phi(.,\theta)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

iii) Pour dominer ϕ sur tout segment de $\mathbf{R}$, on fixe un segment de $\mathbf{R}$ qui est contenu dans un segment de la forme $[-a,a]$ où $a > 1$, puis, pour $\theta \in]0,\pi[$ fixé, on étudie les variations de $\phi(.,\theta)$ sur $[-a,a]$. On trouve, puisque $\ln\left(\sin^2\theta\right) = 2\ln(\sin\theta)$ vu que $0 < \theta < \pi$:

x	$-a$		$\cos\theta$		a
$\phi(.\theta)$	$\phi(-a,\theta)$				$\phi(a,\theta)$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			$2\ln(\sin\theta)$		

Il en résulte $\forall(x,\theta) \in [-a,a]\times]0,\pi[$:

$$|\phi(x,\theta)| \leq \max\left(|\phi(a,\theta)|, |\phi(-a,\theta)|, 2|\ln(\sin\theta)|\right)$$

donc, puisque le maximum d'un ensemble fini de réels positifs est majoré par leur somme :

$$|\phi(x,\theta)| \leq |\phi(a,\theta)| + |\phi(-a,\theta)| + 2|\ln(\sin\theta)|.$$

La fonction majorante est la somme de trois fonction intégrables sur $]0,\pi[$, elle donc intégrable sur $]0,\pi[$.

f est donc continue sur $\mathbf{R}$.

□

8 Dérivation sous le signe somme

8.1 Le théorème de dérivation sous l'intégrale

Théorème 4 (Théorème de dérivation sous l'intégrale. Démonstration non exigible). *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et vérifiant les propriétés suivantes :*

– *Pour tout $x \in A$, la fonction partielle $f(x,.)$ définie sur I par :*

$$t \mapsto f(x,t)$$

est continue par morceaux sur I et intégrable sur I.

– *Pour tout $t \in I$, la fonction partielle $f(.,t)$ définie sur A par :*

$$x \mapsto f(x,t)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et sa dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est continue par morceaux sur I.

– *il existe une fonction ϕ, continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :*

$$\forall(x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi(t).$$

(Hypothèse de domination)

Alors la fonction g définie sur A par :

$$x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur A et, pour tout $x \in A$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est intégrable sur I et :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

(Formule de Leibniz) **Ce résultat est encore vrai si l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de** A.

Démonstration. Soit $a \in A$ et (x_n) une suite d'éléments de $A - \{a\}$ qui converge vers a. L'inégalité des accroissements finis amène :

$$\forall t \in I, \ \left| \frac{f(x_n, t) - f(a, t)}{x_n - a} \right| \leq \phi(t).$$

De sorte que le théorème de convergence dominée s'applique à la suite (f_n) de fonctions définies sur I par : $f_n(t) = \dfrac{f(x_n, t) - f(a, t)}{x_n - a}$ ce qui prouve la dérivabilité de g et la formule de Leibniz au point a. La continuité de g' provient du théorème 3. Enfin si l'hypothèse de domination est vérifiée seulement sur tout segment, les restrictions de g aux segments de A sont $\mathcal{C}^1$, il en est donc de même de g avec la même expression de la dérivée. $\square$

Exemple 12 (Mines). *Soient $a > 1$ et $b > 1$ des réels. Calculer :*

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{a - \cos t}{b - \cos t}\right) \mathrm{d}t$$

Démonstration. Posons, pour $(x, t) \in D =]1, +\infty[\times [0, \pi]$:

$$f(x, t) = \ln(x - \cos t)$$

Vérifions les hypothèses du théorème de dérivabilité sous l'intégrale.
- Pour $x \in]1, +\infty[$, la fonction $f(x, .)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$; elle y est donc intégrable.
- Pour $t \in [0, \pi]$, la fonction $f(., t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée partielle par rapport à x est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{x - \cos t}$$

  et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ est continue sur $[0, \pi]$.
- Si $[a, b] \subset]1, +\infty[$ est un segment :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, \pi], \ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{a - 1}.$$

  Dominante constante donc intégrable sur $[0, \pi]$.

La fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_0^\pi \ln(x - \cos t)\, \mathrm{d}t$$

est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et :

$$g'(x) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x - \cos t}$$

Cette dernière intégrale se calcule *via* le changement de variable :

$$u = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \text{avec } 0 \leq t < \pi$$

qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $[0, \pi[$ sur $[0, +\infty[$ et :

$$\frac{\mathrm{d}t}{x - \cos t} = \frac{2\, \mathrm{d}u}{(x - 1) + (x + 1)u^2}$$

D'où :

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x - \cos t} = \int_0^{+\infty} \frac{2\, \mathrm{d}u}{(x - 1) + (x + 1)u^2}.$$

L'intégrande de droite est intégrable sur $[0, +\infty[$ en vertu du théorème de changement de variable. On trouve en intégrant de 0 à T et en faisant tendre T vers $+\infty$:

$$g'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Donc :

$$\forall x > 1, \ g(x) = \pi \operatorname{Argch} x + C = \pi \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C$$

et donc :

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{a - \cos t}{b - \cos t}\right) \mathrm{d}t = \pi \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{b + \sqrt{b^2 - 1}}\right)$$

$\square$

Exemple 13. *(Mines) Calculer, pour $x > 1$:*

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} \mathrm{d}t$$

Démonstration. Considérons la fonction des deux variables (x, t), définie sur $D =]1, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}$$

– Pour $x > 1$ fixé la fonction $f(x, .)$ est continue sur $]0, +\infty[$; prouvons son intégrabilité sur $]0, +\infty[$:

a) Intégrabilité sur $]0, 1]$

$$\lim_{t\to 0^+} f(x,t) = 1$$

$f(x, .)$ se prolonge donc par continuité à $[0, 1]$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$.

b) Intégrabilité sur $[1, +\infty[$ On a, quand $t \to +\infty$:

$$|f(x,t)| \sim \frac{\mathrm{e}^{-(x-1)t}}{2}$$

qui assure son intégrabilité puisqu'elle est **positive** et que la majorante est intégrable sur $[1, +\infty[$ [3].

– Soit $t \in]0, +\infty[$, $f(., t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

– Essayons de dominer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sur un segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$ car une domination globale sur tout l'intervalle $]1, +\infty[$ échoue. Pour $(x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$, il vient :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t \le \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{sh}\,t$$

Cette dominante est intégrable sur $]0, +\infty[$ car **positive**, continue sur cet intervalle, continûment prolongeable en 0 et équivalente en $+\infty$ à la fonction :

$$\frac{\mathrm{e}^{-(a-1)t}}{2}$$

[3]On pourrait aussi appliquer la règle du $t^\alpha f(t)$

positive et intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème 4 assure donc que $g \in \mathcal{C}^1(]1, +\infty[, \mathbf{R})$ et que, pour $x > 1$:

$$g'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}$$

Donc, sur $]1, +\infty[$:

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C.$$

Remarque 2. *La tangente hyperbolique est exclue. Il faut connaître les intégrales en logarithme valables sur tous les intervalles.*

– Pour évaluer la constante C on va étudier la limite de g au voisinage de $+\infty$. À cet effet, on prend une suite (x_n) de réels de l'intervalle $]1, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$ et on étudie le comportement de la suite de terme général $g(x_n)$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $x_n \ge 2$. Posons :

$$f_n(t) = f(x_n, t) \qquad \text{pour } n > N$$

On a :
– $f_n \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbf{R})$,
– pour tout $t > 0$, $|f_n(t)| \le \phi(t) = f(2, t)$. Fonction positive, continue, intégrable sur $]0, +\infty[$.
– La suite $(f_n)_{n>N}$ converge simplement, sur $]0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Le théorème de convergence dominée assure donc :

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0$$

Comme le résultat est vrai, quelle que soit la suite (x_n) tendant vers $+\infty$, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

On en déduit $C = 0$.

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

□

Exercice 14. *La fonction f définie par :*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{1} \ln(1 - xt)\, \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $]-\infty, 1]$. Sur quel intervalle est-t-elle $\mathcal{C}^1$?

8.2 Calcul des dérivées successives

Montrons, sur un exemple, comment on prouve qu'une fonction g définie par une intégrale est de classe C^∞. La méthode générale est la suivante.

- On trouve, en dérivant g **au brouillon** et formellement n fois sous le signe somme, l'expression *supputée* de $g^{(n)}$. On introduit une suite (g_n) de fonctions, avec $g_0 = g$ et g_n est l'expression supputée de $g^{(n)}$.
- On prouve, en appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale que g_n est de classe C^1 et que $g_n' = g_{n+1}$. On en déduit, par récurrence sur n, que g est de classe C^n et que $g^{(n)} = g_n$.

Remarque 3. *Si l'on a du mal à trouver une domination globale, penser à dominer sur tout segment de A. Le théorème reste valable.*

Exemple 14. *La fonction Γ, définie précédemment sur $]0, +\infty[$ par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \,\mathrm{d}t$$

est de classe C^∞ et, pour tout entier naturel n :

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln^n t \; t^{x-1} \,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Notons $f_n(x, t)$ la fonction définie sur $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x, t) = \mathrm{e}^{-t} \; \ln^n t \; t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t} \; \ln^n t \; \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$$

Il vient les propriétés suivantes :

- Pour $x > 0$ fixé, $f_n(x, .)$ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ d'après les propriétés opératoires des fonctions continues. Les lecteurs vérifieront son intégrabilité sur $]0, +\infty[$.

- Pour $t > 0$ fixé, $f_n(., t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée partielle relativement à x sur cet intervalle est donnée par :

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) = f_{n+1}(x, t).$$

$\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x, .)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Reste à voir les hypothèses de domination. Il est peu raisonnable d'espérer une majoration du type :

$$|f_n(x, t)| \leq \phi(t)$$

en tout point $(x, t) \in D$. On va d'abord prouver une telle majoration sur : $[a, b]\times]0, +\infty[$ où $0 < a < 1 < b$ (domination sur tout segment). On observe que :

$$\begin{cases} 0 < t^x \leq t^a & \text{pour } 0 < t \leq 1 \text{ et } a \leq x \leq b \\ 0 < t^x \leq t^b & \text{pour } t \geq 1 \text{ et } a \leq x \leq b \end{cases}$$

Il en résulte, en discutant suivant la position de t par rapport à 1, que pour tout $(x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$:

$$|f_n(x, t)| \leq \phi_n(t)$$

avec :

$$\phi_n(t) = \mathrm{e}^{-t} \; |\ln^n t| \; (t^{a-1} + t^{b-1})$$

et donc aussi :

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t)\right| = |f_{n+1}(x, t)| \leq \phi_{n+1}(t)$$

Il faut enfin prouver l'intégrabilité de ϕ_n (et donc de ϕ_{n+1}) sur $]0, +\infty[$:
- **Au voisinage de** $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \phi_n(t) = 0$$

donc ϕ_n, qui est **continue et positive** sur $[1, +\infty[$, vérifie :

$$\phi_n(t) = o(t^{-2}) \text{ au voisinage de } +\infty$$

donc ϕ_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

– **Au voisinage de** 0 : Soit $\alpha \in]0, a[$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi_n(t)}{t^{\alpha-1}} = 0$$

Donc ϕ_n, qui est **continue et positive** sur $]0, 1]$, vérifie :

$$\phi_n(t) = o(t^{\alpha-1}) \text{ au voisinage de } 0$$

donc ϕ_n est intégrable sur $]0, 1]$.

ϕ_n est donc continue et intégrable sur chaque intervalle $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme assure que la fonction g_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0,\ g_n'(x) = g_{n+1}(x)$$

Comme $g_0 = \Gamma$, le résultat attendu s'en déduit immédiatement. □

Exercice 15 (Théorème élémentaire de division des applications $\mathcal{C}^\infty$). *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que $f(0) = 0$. En remarquant que, pour $x \neq 0$:*

$$\frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t,$$

prouver que cette fonction, convenablement prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Que faudrait-il supposer pour avoir le même résultat avec $\frac{f(x)}{x^p}$, $p \in \mathbf{N}^*$?

9 Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

Voici un exemple complet :

Exemple 15. *On définit une fonction f sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :*

$$f(x, t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t - xt}}{\sqrt{t}}.$$

– *Pour $x > 0$, la fonction :*

$$t \mapsto f(x, t)$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$.

– *Pour $x = 0$ l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} f(0, t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente, non absolument convergente [4].

– *La fonction g, définie pour $x \geq 0$ par :*

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t - x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et vérifie, sur cet intervalle, l'équation différentielle :

$$g(x) = 2(\mathrm{i} - x)\,g'(x)$$

avec, quand $x \to +\infty$:

$$g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

– *Pour $x > 0$:*

$$g(x) = \sqrt{\pi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\ \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\arctan x}}{(x^2 + 1)^{1/4}}$$

– *g est continue en 0, on en déduit la valeur de l'intégrale semi convergente de Fresnel :*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

Démonstration. -

[4] On dit aussi semi-convergente

– Soit $x > 0$ fixé, la fonction $f(x, .)$ est continue sur $]0, +\infty[$, prouvons son intégrabilité sur cet intervalle. Pour $t > 0$, il vient :

$$|f(x,t)| = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}$$

L'intégrabilité de la fonction $t \mapsto |f(x,t)|$ sur $]0, +\infty[$ est un exercice désormais classique laissé aux lecteurs.

– La fonction $t \mapsto |f(0,t)| = \frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$; la fonction $t \mapsto f(0,t)$ n'est donc pas intégrable sur cet intervalle. Cependant elle est intégrable sur tout intervalle $]0, T]$ avec $T > 0$. Prouvons que la fonction :

$$T \mapsto \int_0^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

admet une limite quand $T \to +\infty$. Limite qui est notée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, non absolument convergente. Comme :

$$\int_0^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_1^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

il suffit de l'établir pour la fonction :

$$T \mapsto \int_1^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Comme on l'a vu en cours, le principe consiste à accélérer la convergence vers 0 de la fonction intégrée *via* une intégration par parties :

$$\int_1^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}\sqrt{t}}\right]_1^T + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_1^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

licite car les fonctions considérées sont de classe C^1 sur $[1, T]$. Or :

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^{3/2}}\right| \leq t^{-3/2}$$

pour $t \geq 1$, cette fonction est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ d'où l'existence de la limite quand $T \to +\infty$.

– g est définie sur $[0, +\infty[$. Prouvons qu'elle est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
  – f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sqrt{t}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t - xt},$$

continue séparément par rapport aux variable x et t et qui satisfait, sur le segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$, la relation de domination :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) \tag{4}$$

avec :

$$\psi(t) = \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t - xt}\ \mathrm{d}t.$$

– Pour établir l'équation différentielle, évaluons, pour $0 < h < T$ l'intégrale :

$$\int_h^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t - xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

par parties :

$$\int_h^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t - xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left[\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t - xt}\right]_h^T - 2\int_h^T (i - x)\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t - xt}\ \mathrm{d}t$$

En faisant tendre h vers 0 puis T vers $+\infty$, il vient :

$$g(x) = 2(\mathrm{i} - x)\,g'(x)$$

L'intégration de cette équation fournit :

$$g(x) = A\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\arctan x}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Pour déterminer la constante A, déterminons un équivalent de g quand $x \to +\infty$.

– Le changement de variable $xt = u$ dans cette intégrale donne :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u/x}\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Soit x_n une suite tendant vers $+\infty$: Pour tout $u \in]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u/x_n}\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée assure :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n}\,g(x_n) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

On en déduit la valeur de la constante A :

$$A = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

Donc, pour $x > 0$:

$$g(x) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2\arctan x}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

– Étudions maintenant la continuité de g en 0. Le problème provient de la semi convergence de l'intégrale définissant $g(0)$. Aucune des formes du théorème de convergence dominée ne s'applique. On va, pour contourner le problème, se ramener encore à des fonctions intégrables par des intégrations par parties :

$$g(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

La fonction u définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$u(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0,+\infty[$ car l'intégrande est une fonction continue de x sur cet intervalle et est dominé par :

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

qui est intégrable sur $]0,2\pi]$.
La fonction v définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$v(x) = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

admet une autre expression, *via* une intégration par parties. Pour $x \geq 0$, il vient :

$$\int_{2\pi}^{T} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}}{(\mathrm{i}-x)\sqrt{t}}\right]_{2\pi}^{T} + \frac{1}{2(\mathrm{i}-x)}\int_{2\pi}^{T} \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

D'où, en faisant tendre T vers $+\infty$:

$$v(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi x}}{(\mathrm{i}-x)\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2(\mathrm{i}-x)}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t \geq 2\pi$ fixé, la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}}{t^{3/2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dominée par $t \mapsto t^{-3/2}$ qui est continue et intégrable sur $[2\pi,+\infty[$. La fonction v est donc continue sur $[0,+\infty[$ et on en déduit la continuité de g sur $[0,+\infty[$. La continuité de g en 0 fournit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

□

10 Interversion d'intégrales

Théorème 5 (Théorème de Fubini vu en première année). *Soit f une fonction continue sur $[c,d]\times[a,b]$ à valeurs complexes. Alors les fonctions :*

$$x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$t \mapsto \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

sont continues respectivement sur $[c,d]$ et $[a,b]$ et :

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$

Cette valeur commune peut se noter :

$$\iint_\Delta f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

avec $\Delta = [c,d]\times[a,b]$.

Exercice 16. *Posons :*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\cos xt\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Étudier f*, calculer sa transformée de Laplace :*

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x$$

où s *est un réel strictement positif. Étudier le comportement de* $\mathcal{L}f$ *au voisinage de* 0.

Exercice 17. *Soit* $f\in\mathcal{C}^2([0,+\infty[,\mathbf{C})$ *telle que* f *et* $f"$ *soient intégrables sur* $[0,+\infty[$*. Montrer que* f' *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *et majorer* $N_1(f')$ *en fonction de* $N_1(f)$ *et de* $N_1(f")$.
[difficile] Essayer de généraliser avec une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Cinquième partie
Travaux dirigés

11 Convergence dominée

Exercice 18 (X 97). *Soient* a,b *avec* $0<a<b$*. Existence de :*

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$

En utilisant le changement de variable :

$$u = \frac{ab-t^2}{2t}$$

Montrer que $I(a,b) = I\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$.
Etudier les suites (a_n) *et* (b_n) *définies par* $a_0=a, b_0=b$ *et :*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n},\qquad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

Exprimer $I(a,b)$ *à l'aide de la limite commune à ces deux suites.*

Exercice 19 (Mines 2003). *Équivalent de :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Exercice 20 (Mines 2003). *Équivalent de :*

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{n^2}\right)}\ ?$$

Exercice 21 (Mines 2005).

$$f_n(x) = \frac{\exp\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)x\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{1+x^2}$$

$$u_n = \int_0^n f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. *Existence de* u_n *?*
2. *Comportement de la suite quand* n *tend vers l'infini ?*
3. *Si on remplace* f_n *par :*

$$g_n(x) = \frac{\exp\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)x\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{1+x^2}$$

Que peut-on dire du comportement de u_n*, selon les valeurs de* α *?*

Exercice 22 (Mines 2008). *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbf{R}_+$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$*, continue et intégrable sur* $\mathbf{R}_+$*. Montrer que :*

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = o(x)\quad \text{quand } x\to+\infty$$

Exercice 23 (Cen 2008). *Soit* f *une fonction continue sur* $\mathbf{R}_+$ *à valeurs strictement positives telle que :* $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f'(t)}{f(t)} = \alpha\in\mathbf{R}^*$.

1. *Déterminer* $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ *et en déduire la nature de la série de terme général* $f(k)$ *dont le reste d'ordre* n *est, lorsqu'elle converge, désigné par* R_n *et la somme partielle d'ordre* n *est, lorsqu'elle diverge, désigné par* S_n.
2. *Montrer que :*

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\alpha-1}{\alpha}f(k)$$

3. *Donner des équivalents de* R_n *et* S_n *en fonctions d'intégrales quand* $n\to\infty$.

Remarque 4. *Je demande d'utiliser, autant que possible, le théorème de convergence dominée dans les deux premières questions de cet exercice.*

Exercice 24 (CCP 99, TPE 2008). *Calculer :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 25 (Mines 2003, Cen 2007 et 2008). -

1. *Calculer :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln\,\mathrm{d}t$$

2. *Calculer* $\int_0^1 t^n \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ *et en déduire une autre expression de la limite précédente.*

Exercice 26 (Mines 2003). *Étudier*

$$I_n=\int_{-\sqrt{n}}^0 \left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 27 (Mines 2000). *Étudier l'intégrabilité, sur* $[0,+\infty[$, *de la fonction* f_n *définie par* $f_n(x)=\frac{n^{3/2}\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$. *Étudier le comportement asymptotique de la suite* $\int_{[0,+\infty[} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 28 (Centrale 2001). *Déterminer la limite, quand* $n\to\infty$ *de :*

$$\int_1^3 \frac{\ln^{2n} t-1}{\ln^{2n} t+1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 29 (Mines 2007). *Après en avoir étudié l'existence, déterminer la limite, quand* $n\to\infty$, *de :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}(\sqrt{n}t)}{1+t\ln t+\cdots+(t\ln t)^n}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 30 (Mines 98). *Pour* $n\geq 1$, *on pose :*

$$I_n=\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/n}\,\mathrm{d}x$$

Trouver les limites de (I_n) *et de* (I_n^n) *quand* $n\to\infty$.

Exercice 31 (Cen 98). *On pose :*

$$I_n=\int_0^1 \ln(1-t^n)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la limite de (I_n) *puis de* (nI_n).

Exercice 32 (Cen 2008). *Soit* $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$. *Déterminer la limite* L *de la suite* (I_n) *de terme général : :*

$$I_n=\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$$

Donner des conditions suffisantes sur f *permettant de trouver un équivalent simple de* u_n-L *et le préciser.*

Exercice 33 (Mines 2008). *Équivalent de la suite de terme général : :*

$$I_n=\int_0^{1/n^2} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{1-n^2x}}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Exercice 34. *Nature de*

$$\int_0^{+\infty} |\sin x|^x\,\mathrm{d}x\ ?$$

Exercice 35. *Trouver, quand* $n\to\infty$, *un équivalent de :*

$$I_n=\int_0^1 \sin(\pi t^n)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 36 (Mines 2008). *Déterminer la limite de la suite* (I_n) *définie par :*

$$I_n=\left(\int_0^\pi x^n\sin x\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

Exercice 37 (Mines 2003). *Nature de la suite* (I_n) *:*

$$I_n=\int_0^1 \ln\left(\cos\left(x^n\right)\right)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 38 (CCP 99). *Existence et étude de la suite de terme général :*

$$u_n=\int_0^1 \frac{1-t^n}{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 39 (Mines 2001). *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$ *telle que* $f(1)\neq 0$. *Donner un équivalent de :*

$$u_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 40 (Cen 98 et Mines 2001). *Soit* $f\in\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{C})$ *bornée. On pose :*

$$a_n=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *et un équivalent si* $f(0)\neq 0$.

Exercice 41 (Mines 98). *Existence et limite de :*

$$I_n=\int_0^{+\infty} \frac{nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}}{\ln(1+x)+|\cos x|}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 42 (Mines 98). *Soit* $f\in\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ *bornée. Trouver :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} \frac{n^2tf(t)}{(1+n^3t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 43 (Cen 98, 2008, Mines 2008). *Soit* $f\in\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{C})$ *bornée. Trouver :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n nf(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 44. *Soit* f *continue, positive sur* $[a,b]$. *Déterminer :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 45 (Mines 99, 2003 et 2004). *Soit* $a\in]0,1]$. *Montrer que, quand* $n\to\infty$ *:*

$$\int_0^a (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

Soit $f\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbf{R})$ *telle que* $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$ *et* $|f(x)|<1$ *sur* $]0,1]$. *Donner un équivalent de :*

$$\int_0^1 [f(x)]^n\,\mathrm{d}x$$

Exercice 46 (X 98). *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$, nulle en dehors d'un segment. Déterminer :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} nf(x)\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n^3}\mathrm{d}x$$

Exercice 47 (X 2001). *Étudier la suite (u_n) de terme général :*

$$u_n=\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}{1+x^3}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x$$

Exercice 48 (X 99). *Existence et limite de la suite (u_n) de terme général :*

$$u_n=\int_0^1\frac{t^n}{1-\sqrt[3]{t}}\ln t\,\mathrm{d}t$$

Nature de $\sum_{n\geq 0}(-u_n)^\alpha$ suivant les valeurs de α.

Exercice 49 (Mines 98). *Montrer que :*

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{pk+1}\sim An^{-1/p}$$

avec $A>0$

Exercice 50 (Mines 2003). *Nature de la suite :*

$$I_n=\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2+..+x^n}\ ?$$

Exercice 51 (Centrale 2001, Mines 2008). -

1. *Démontrer l'inégalité de la moyenne arithmético-géométrique.*
2. *On considère :*

$$u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x+x^2+..+x^{n-1}}\mathrm{d}x$$

   (a) *Étude de (u_n).*

   (b) *Convergence éventuelle de $\sum_{k\geq 1}u_k$?*

   (c) *(Une fois le reste fait) Équivalent de u_n ?*

Exercice 52 (Mines 98). *Limite et développement asymptotique à deux termes de :*

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\mathrm{d}t$$

Exercice 53 (Mines 98 et 99). *Mêmes questions que le précédent avec :*

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

Exercice 54 (Ens 99). *Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, nulle pour $|t|>a>0$. Est-ce possible ? Déterminer la limite de :*

$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{int^3}\,\mathrm{d}t$$

[Intégrer judicieusement par parties.]

Exercice 55 (Mines 2002). *Soient k,n des entiers naturels non nuls. On note $r_{k,n}$ le reste de la division euclidienne de n par k. Déterminer :*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_{1,n}+r_{2,n}+\cdots+r_{n,n}}{n^2}$$

12 Interversion série-intégrale

Exercice 56 (CCP 98). *Étudier la suite et série de terme général :*

$$\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 57 (CCP 2008). *Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ et g définie sur $[0,1[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$. On définit, pour tout entier naturel n $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^nf(x)\,\mathrm{d}x$.*

1. *Déterminer $\lim_{n\to\infty}u_n$.*
2. *On suppose g intégrable sur $[0,1[$. Montrer que $\sum u_n$ converge et que :*

$$\sum_{n=0}^\infty u_n=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

3. *On suppose $f(1)\neq 0$. Donner un équivalent simple de u_n* [commencer par regarder des exemples simples].
4. *Dans cette question on prend pour $f: x\mapsto\sqrt{1-x}$.*

   (a) *Prouver la convergence de $\sum u_n$ et calculer sa somme.*

   (b) *Même question avec $\sum(-1)^nu_n$.*

Exercice 58 (Tpe 2008). *Soit $a>0$. Prouver l'égalité :*

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{1+n^a}$$

Exercice 59 (CCP 2007). -

1. *Calculer $\sup_{x\geq 0}x\,\mathrm{e}^{-x}$.*
2. *Montrer, avec toutes les justifications nécessaires, l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{(1-x\,\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\frac{n!}{n^n}$$

Exercice 60 (Mines 2006).

$$I_n=\int_0^1 x^n\ln(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

Étudier la série de terme général I_n.

Exercice 61 (Mines 2008). *Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$*

1. *Nature de la série de terme général I_n ?*
2. *Nature de la série de terme général $(-1)^nI_n$?*
3. *Développement à deux termes de I_n ?*

.

Exercice 62 (Ccp 2008).

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^nn}{n^2+x^2}$$

1. *Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.*
2. *Étudier, pour $r \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-rt}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ et la calculer si possible.*
3. *En déduire que*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

Exercice 63 (Cen 2003). *Prouver, pour $x \in \mathbf{R}$, l'égalité :*

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$$

Exercice 64 (Mines 2006).

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

1. *Convergence de l'intégrale ?*
2. *Expression de I sous forme d'une série.*

Exercice 65 (Mines 2006, 2007). -

1. *Existence de :*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \ ?$$

2. *Montrer que :*

$$R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

3. *Montrer que la série de terme général R_n converge et calculer sa somme.*

Exercice 66 (Mines 2007). *Soit f définie sur $\mathbf{R}^*$ par*

$$f(x) = \left(\frac{x}{\operatorname{sh} x}\right)^2$$

1. *Prouver que f, convenablement prolongée en 0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.*
2. *Exprimer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ comme somme d'une série ; en déduire sa valeur (on rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$).*

Exercice 67 (Cen 2001). *Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose :*

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. *Définition de a_n et convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$?*
2. *En considérant $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\ln t\,\mathrm{d}t$, évaluer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Exercice 68 (Mines 99). *Étudier $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec :*

$$u_n = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n\,\mathrm{d}t$$

Exercice 69 (TPE 2001). *Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec :*

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 70 (Mines 2006). -

1. *Nature de la série de terme général :*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\ln(1-x)}\,\mathrm{d}x \ ?$$

2. *Équivalent de I_n en plus l'infini ?*

Exercice 71 (Mines 2003, 2004, 2008 Centrale 2007).

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Existence de a_n, rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$? convergence et somme des séries de termes généraux $a_n R^n$ et $(-1)^n a_n R^n$? Relation de récurrence et équivalent de a_n ?

Exercice 72. *Convergence et calcul de :*

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2)\,\mathrm{d}t$$

et de :

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 73 (Mines 99). *Écrire l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$$

comme somme d'un série.

Exercice 74 (Centrale 99). *Définition, continuité, classe $\mathcal{C}^1$ de la somme f de la série de fonctions :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}}{n^2+t^2}$$

Étudier les variations de f et sa limite en $+\infty$; est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?

Exercice 75 (Cen 98 et 2001). *On pose :*

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Donner une forme condensée de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ puis un équivalent simple de u_n.

Exercice 76. *Posons, pour $x \in \mathbf{R}$:*

$$H_n(x) = \frac{x\,(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

Prouver, pour $x > -1$, la relation :

$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} H_n(x)$$

En déduire, pour $x > -1$, l'identité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} H_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\,(n+x)}$$

Exercice 77 (Centrale 2001). - *On considère :*

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. *Existence de cette intégrale ?*
2. *Exprimer* I *en fonction de* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Exercice 78 (Mines 98). *Calculer :*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x^n \sin x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 79 (Mines 2003, Cen 2008). *Justifier l'existence de :*

$$\int_{\mathbf{R}_+} \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$$

et l'écrire comme somme d'une série.

Exercice 80 (Mines 2008).

$$J(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

1. *Domaine de définition de* J *?*
2. *Développer* J *en série entière sur son domaine de définition.*

Exercice 81 (Mines 98, Cen 2002, Mines 2008). -

1. *Déterminer une relation de récurrence entre les intégrales :*

$$J_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

2. *Nature de la série* $\sum_{n\geq 0} J_n$.
3. *Rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} J_n\,x^n$.
4. *Montrer que* $J_n\sim cn^{-1/2}$ *avec* $c>0$.

Exercice 82. *Convergence, suivant* a*, de la série de terme général :*

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^{(n^a)}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 83 (Esim 2000). *Prouver l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty}\ln(\operatorname{th} x)\,\mathrm{d}x=$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\frac{t^2\,\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Calcul exact de l'intégrale ?

Exercice 84 (Cen 98, Mines 2000 Ccp 2007 (dans le cas où $x=0$)). *Pour* $x\geq 0$*, écrire l'intégrale suivante comme somme d'une série :*

$$I(x)=\int_0^1 t^x\ln t\,\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire un équivalent de $I(x)$ *quand* $x\to+\infty$.

Exercice 85 (Mines 98, 2001, 2008). *Montrer que la fonction* f *:*

$$x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$*. Calculer les coefficients de son développement puis exprimer* f *à l'aide des fonctions usuelles.*

Exercice 86 (Mines 2004). *On considère la fonction* F *:*

$$x\mapsto\int_0^{\pi}\ln(1+x\,\cos t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Déterminer le domaine de définition de* F*. Limites aux bornes du domaine ?*
2. *Montrer que* F *est développable en série entière au voisinage de* 0*. Déterminer le rayon de convergence de la série.*

Exercice 87. *Montrer que :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+x\sin t}$$

est définie sur $]-1,1[$*. Prouver qu'elle admet, au voisinage de* 0*, un développement en série entière à coefficients rationnels.*

Exercice 88. *Développer en série entière au voisinage de* 0 *la fonction* f *définie par :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 89 (Centrale 2001). *Montrer que* F *définie par :*

$$F(x)=\int_{\mathbf{R}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,t}}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$*. Quel est le rayon de convergence de la série ?*

Exercice 90 (CCP 2003). *Domaine de définition de :*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\,t}{\sqrt[4]{\operatorname{sh} t}}\,\mathrm{d}t\ ?$$

Montrer que f *est* $\mathcal{C}^1$ *resp développable en série entière sur des intervalles à préciser.*

Exercice 91 (X 2001). *Existence et calcul de :*

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\,t}{(\operatorname{ch} t)^{1/3}}\,\mathrm{d}t$$

[Indication : décomposer $(\operatorname{ch} t)^{-1/3}$ *en série entière de* e^{-t}*].*

Exercice 92. *Exprimer, à l'aide des :*

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

L'intégrale :

$$\int_0^1\arctan t\,\ln\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

13 Intégrales à un paramètre continu

Exercice 93 (Cen 2008). *Soit f continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbf{R}$ de $t \mapsto \dfrac{t f(t)}{t + \mathrm{i}x}$. Déterminer :*

$$\lim_{x\to 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{t f(t)}{t+\mathrm{i}x} \,\mathrm{d}t \text{ ?}$$

Exercice 94 (X 2000 et 2002). *Définition et continuité de*

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(t^x\right) \,\mathrm{d}t$$

Exercice 95 (Mines 2007, 2008). *Définition, continuité et équivalents aux bornes de l'intervalle de définition de f définie par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{1+t^2}}$$

Exercice 96 (Mines 2008). *f définie par :*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x^\alpha + t^3}$$

est elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 97. *Continuité ? Limites en 0 et $+\infty$ de :*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{x^2-y^2}} \,\mathrm{d}y$$

Exercice 98 (Mines 99). *Pour $|\alpha| \le 1$, on pose :*

$$f(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha\, x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$$

Étudier la définition, la continuité, la dérivabilité de f. Calculer $f'(\alpha)$ et vérifier qu'en 1 f n'est pas dérivable.

Exercice 99 (Mines 2007).

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)^2} \,\mathrm{d}t$$

Définition ? Continuité ? Dérivabilité ? Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui quel est le rayon de convergence de la série ?

Exercice 100 (Mines 99 et 2000). *Combien de fois la fonction f définie par :*

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) \,\mathrm{d}t$$

s'annule-t-elle sur $[\pi/2, \pi]$?

Exercice 101 (Cen 2008). *Prouver, pour $x \in]-1,1[$, la relation :*

$$\int_0^\pi \ln(1 + x\cos t) \,\mathrm{d}t =$$

$$\pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right).$$

Exercice 102 (X 2001, Centrale 2007 (énoncé de Centrale)). *Étudier la fonction f définie par :*

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \arctan\left(x \tan t\right) \,\mathrm{d}t$$

1. *Tracer la courbe représentative avec Maple.*
2. *Définition, continuité, dérivabilité, variations.*
3. *Déterminer une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout $x \neq 0$ pour lequel le premier membre a un sens :*
$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha$$
4. *Donner une expression simplifiée de f' sans symbole intégral.*
5. *Développement asymptotoque de f à deux termes en 0.*

Exercice 103 (Ccp 2007).

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \arctan t \,\mathrm{d}t$$

1. *Domaine de définition de f ?*
2. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ où elle vérifie l'équation différentielle :*
$$xy" + 2y' + xy = \frac{1}{x}$$
3. *Équivalents de f et de f' en 0 ?*

Exercice 104. *On définit f de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(1+t)} \,\mathrm{d}t$$

Etudier f, trouver une équation différentielle du premier ordre qu'elle satisfait. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 105 (Mines 2001 et 2004). *On définit une fonction f par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$$

1. *Définition et continuité de f ?*
2. *Dérivabilité de f ?*
3. *f admet-elle une limite en $+\infty$?*
4. *Limite de f' en 0 ? Équivalent de la dérivée en 0 ?*
5. *f est-elle dérivable en 0 ?*
6. *Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une autre expression de f.*

Exercice 106 (Centrale 2007).

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\,x}}{(1+t^2)^2} \,\mathrm{d}t$$

1. *Calculer g et h avec Maple.*

2. *Parité de g et h ?*
3. *Exprimer h' en fonction de g et g' sur* $\mathbf{R}$.
4. *Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer g' en fonction de g et h.*
5. *Déterminer g et h.*

Exercice 107 (Cen 98). *Étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 108 (Cen 98, Mines 2004 et 2006). *Domaine de définition de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t\,x}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

f est-t-elle continue, $\mathcal{C}^1$? Calculer $f'(x)$, en déduire $f(x)$. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$$

Exercice 109. *Existence et calcul de :*

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{xt}\left(\int_{|x|}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Exercice 110. *Calculer :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+(y-x)^2)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Exercice 111 (Mines 2001). *Domaine de définition de :*

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(x^2+\tan^2\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\ ?$$

Calculer f.

Exercice 112 (Centrale 2002). -

1. *Déterminer le domaine de définition et de continuité de :*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. *Calculer F.*

Exercice 113 (Mines 99, 2005). *Déterminer une fonction s telle que :*

$$I(h) = \int_0^h \frac{s'(x)}{\sqrt{h-x}}\,\mathrm{d}x$$

soit indépendante de h.

Exercice 114 (Cen 2000). *Domaine de définition et continuité de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\cos t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 115 (Mines 99). *Définition et classe de :*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

Trouver une équation différentielle vérifiée par F et, en admettant la valeur de l'intégrale de Gauss, calculer F.

Exercice 116 (X 98 et CCP 2003). *Domaine de définition D de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ ?$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intérieur de D. Calculer f et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 117 (Cen 98). *Limite et équivalent quand $a \to +\infty$ de :*

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^3+a^3}\ ?$$

Exercice 118 (Cen 98). *Montrer que, pour $x > 0$, l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

existe ; soit $f(x)$ sa valeur. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x est au voisinage de $+\infty$ puis de 0^+.

Exercice 119 (Mines 2005). -

1. *Domaine de définition de f telle que, pour tout x :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{x^2+t}\ ?$$

2. *Continuité de f ?*
3. *Montrer qu'en $+\infty$ $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$.*

Exercice 120 (Mines). $p \in \mathbf{N}^*, \alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

$$J(p,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+\alpha^2)^p}$$

1. *Calculer, pour α fixé, $\lim\limits_{p\to\infty} J(p,\alpha)$.*
2. *Partie principale de $J(p,\alpha)$ quand $\alpha \to 0^+$?*
3. *Partie principale de $J(p,\alpha)$ quand $\alpha \to +\infty$?*

Exercice 121 (Mines). *On pose, pour $a > 0$:*

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^4 x + a^4}}$$

Limite et équivalent de $J(a)$ quand a tend vers 0 ?

Exercice 122 (X 98). *Pour $\alpha > 0$, on pose :*

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{sh}^\alpha t + x\,\mathrm{ch}^\alpha t)^{1/\alpha}}$$

Déterminer le domaine de définition de $I(x)$ et un équivalent quand $x \to 0^+$.

Exercice 123 (Mines 2004). *soit*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{1+x}}$$

1. *Domaine de définition ?*
2. *Limite de f en $+\infty$?*
3. *Équivalent de f en 0 ?*

Exercice 124 (Mines 2006). *Soit $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{C})$ nulle sur $\mathbf{R} - [a,b]$.*

1. Prouver l'existence de ψ continue telle que, pour tout réel x :

$$\phi(x) = \phi(0) + x\,\psi(x).$$

2. Déterminer :

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{\phi(x)}{x+\mathrm{i}\,\epsilon}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 125 (X 2003). *Étudier le comportement, quand $x \to 0_+$ de :*

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{(at)^2+x^2}$$

En déduire le comportement, quand $r \to 1_-$ de :

$$\int_0^\pi \frac{t^\alpha(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{1-2r\cos t + r^2}$$

Exercice 126 (Centrale 2001, Mines 2002, Ccp 2007). *:*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{1-\cos(x\,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle à préciser et l'exprimer à l'aide de fonctions classiques.

Exercice 127. *1. x est un paramètre réel positif, on pose :*

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

2. Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$

3. Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $nf(n)f(n-1)$ est une constante que l'on calculera ; en déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

4. que dire de $xf(x)f(x-1)$ pour $x \in [1,+\infty[$?

5. f est elle continue sur $\mathbf{R}_+$?

Exercice 128 (Centrale 2001). *Soit $f : [0,a] \to \mathbf{C}$, continue par morceaux, trouver :*

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^a \frac{h\,f(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 129. *1. Soit f continue, T-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, g continue de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que :*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(xt)g(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Trouver un équivalent, quand $n \to \infty$ de :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\frac{u}{2}} \right| du$$

3. En déduire un équivalent, quand $n \to \infty$ de :

$$K_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right| du$$

On pourra introduire la fonction $g(u) = \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{2}{u}$ et utiliser les questions précédentes

Exercice 130 (Cen 2000 et 2001). *Pour $x > 0$, on pose :*

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Étudier la définition et la continuité de f sur $]0,+\infty[$, les limites et des équivalents aux bornes de cet intervalle.

Exercice 131 (Mines 2000). *Soit ϕ une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ et ψ définie par :*

$$(x,y) \mapsto \left(\cos^2 \frac{x}{\sqrt{y}}\right)^y \phi(x)$$

Montrer que, pour $y > 0$, $x \mapsto \psi(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. Étudier les limites en 0_+ et $+\infty$ de f : $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} \psi(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 132 (Mines 3003). *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, continue : déterminer :*

$$\lim_{x\to a} \int_a^x \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(x-t)}}$$

Exercice 133 (Mines 98). *Déterminer :*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1+t)(\epsilon^2+\epsilon-t)}}$$

Exercice 134 (Mines 98 et Cen 2003). *Existence, continuité, limites et équivalents en 0 et $+\infty$ de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(t^2+x^2)}}$$

Exercice 135 (IIE 2005). *On considère la fonction ϕ :*

$$t \mapsto \int_0^\pi \mathrm{e}^{-t\sin\theta}\cos(t\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que $\phi \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbf{R})$.

2. Montrer que, pour $t > 0$:

$$\phi'(t) = -2\frac{\sin t}{t}.$$

3. Justfier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

Exercice 136 (Enstim 2001). *Montrer que la fonction f :*

$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

vérifie l'équation différentielle :

$$xy" + y' + xy = 0$$

Trouver un équivalent de f en $+\infty$. Démontrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le rayon de la série correspondante.

Exercice 137 (Cen 98). *Domaine de définition de f :*

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

f est-t-elle continue ? De classe $\mathcal{C}^1$? Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 138 (Centrale 2007).

$$G(r) = \int_0^1 \frac{t^r}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que G est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et étudier ses variations.*
2. *Donner une valeur approchée de $G(0)$ avec Maple.*
3. *Poser $u = t^r$ et donner un équivalent de G en $+\infty$.*
4. *Équivalent de G en -1 ?*

Exercice 139 (X 98, Centrale 2007, Mines 2008). *Calculer*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 140 (Mines 2000 Ccp 2007). *Définition, continuité, dérivabilité de :*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Donner une expression de F en supposant connue l'intégrale de Gauss.

Exercice 141 (Mines 98). *Calculer :*

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2 - \mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 142 (Ens 2000). *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, intégrable sur $\mathbf{R}$. On pose :*

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ϕ est-elle définie et continue sur $\mathbf{R}$? Calculer, pour $a < b$:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \phi(x) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,b\,x}}{\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 143 (Mines 98). *Définition, continuité, dérivabilité de :*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(t^2 - 2t\cos x + 1)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Expliciter f.

Exercice 144. *Pour $x > 0$, on pose :*

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x\cos^2 t}}$$

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x\cos^2 t}}$$

1. *Justifier leur existence et calculer $g(x)$.*
2. *On pose $h = f - g$. Montrer que, quand x tend vers 0, $h(x)$ admet une limite que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.*

3. *Donner un développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ au voisinage de 0.*

Exercice 145. *Soit $x > -1$; définition, continuité de :*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe C^1, calculer f.

Exercice 146 (5/2). *Développer en série de Fourier la fonction f_a de période 2π telle que, pour $-\pi \leq x \leq \pi$:*

$$f_a(x) = \operatorname{ch} ax$$

En déduire, pour tout réel a, la valeur de :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 147. *Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$, à valeurs > 0. On pose :*

$$I(x) = \left(\int_0^1 (f(t))^x\,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$$

Étudier sa continuité sur $]0,+\infty[$ et ses limites quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$.

Exercice 148 (X 98, Ccp 2001). *Définition, continuité, calcul de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour :*

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 149 (ESPCI 2001). *Étudier la fonction f définie par :*

$$f(t) = \int_0^{\pi} (x\sin x)^t\,\mathrm{d}x$$

Exercice 150 (X 98). *Définition, classe, développement en série entière au voisinage de 0, calcul de :*

$$I_n(a) = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 151. *Trouver un équivalent quand $t \to +\infty$ de :*

$$\phi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{tx^2\,\mathrm{e}^{-xt}}{(1-\mathrm{e}^{-xt})^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 152. *Donner un équivalent, quand $n \to \infty$ de :*

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 153. *Prouver, pour $x > 0$, l'existence de l'intégrale :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{xt + \mathrm{e}^{tx^2}}$$

1. *Démontrer que :*

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}$$

avec

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u + x\,\mathrm{e}^u}$$

2. *Prouver que :*

$$\int_0^2 \frac{du}{u + x\,e^u} \sim \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand x est au voisinage de zero.

3. *Etablir que :*

$$h(x) = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u + x\,e^u}$$

puis que

$$h(x) = \int_0^a \frac{dt}{(\phi(t) - 1)(x + t)}$$

où ϕ est la fonction réciproque de $u \mapsto u\,e^{-u}$ sur $[2, +\infty[$ et $a = 2\,e^{-2}$.

4. *En déduire que, quand x est au voisinage de zéro, $h(x) = o\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ puis un équivalent simple de f.*

Exercice 154 (X). *Soit $f \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbf{R})$, intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose :*

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(xy)\,e^{-2xy}\,f(y)\,\mathrm{d}y$$

Domaine de définition et de continuité de h. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 155. *Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose :*

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2(xt)}\,\mathrm{d}t$$

1. *Calculer $f(1)$. Comment pourrait on calculer $f(n)$, $n \in \mathbf{Z}$.*
2. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.*
3. *Donner un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.*
4. *Étudier le comportement de f quand $x \to +\infty$.*

Exercice 156 (Mines 98). *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, intégrable sur $\mathbf{R}$. On suppose qu'existe : $M > 0$ tel que $\forall x > 0$,*

$$\int_{\mathbf{R}} |\,e^{itx} - 1||f(t)|\,\mathrm{d}t \le Mx$$

Montrer que l'application $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et déterminer :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx} - 1}{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 157. *Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et :*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-u_n \sin t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 158. *Existence de :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin xt}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$$

Continuité de f, comportement de f au voisinage de 0 et $+\infty$.

Exercice 159 (Cen 98 5/2 seulement). *Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

Exprimer $f(x)$ à l'aide d'une intégrale pour $x > 0$. Trouver un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 160 (Difficile). *Soit f dédinie sur $]0, +\infty[$ par :*

$$f(x) = \int_2^{\infty} \frac{e^{-xt}\,\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Prouver que, lorsque $x \to 0_+$:

$$f(x) \sim \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

En déduire un équivalent, lorsque $x \to 1_-$ de :

$$S(x) = \sum_2^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$$