Espaces euclidiens, géométrie euclidienne

PC*2

15 janvier 2004

Table des matières

Chapitre 1

Espaces préhilbertiens réels ou complexes

1.1 Produit scalaire

1.1.1 Sur un espace vectoriel réel

Définitions et exemples

Définition 1. Un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E est une application $S : E \times E \to \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

Bilinéarité : l'application :

$$x \mapsto S(x, y)$$

est linéaire pour tout y (linéarité à gauche) et l'application :

$$y \mapsto S(x, y)$$

est linéaire pour tout x (linéarité à droite).

Symétrie : pour tout couple $(x, y) \in E \times E$:

$$\boxed{S(y, x) = S(x, y)}$$

Positivité : pour tout $x \in E$:

$$\boxed{S(x, x) \geq 0}$$

Définition : si $\boxed{x \neq 0,\ S(x, x) > 0}$.

Le couple (E, S) s'appelle **espace préhilbertien réel. Si** E **est de dimension finie, on dit euclidien.**

Notation 1. Lorsque S est un produit scalaire sur E, on note souvent $S(x, y)$:

$$(x, y) \quad (x|y) \quad < x, y > \quad < x|y >$$

Voici quelques exemples de produits scalaires courants.

Exemple 1 *(Produit scalaire canonique sur* $\mathbf{R}^n$*).* On appelle **produit scalaire usuel ou canonique ou encore naturel, le produit scalaire défini sur** $\mathbf{R}^n$ **par :**

$$\boxed{(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i =^t XY}$$

Où X **et** Y **sont les matrices unicolonnes représentant** x **et** y **dans la base canonique** (ϵ) *ie* **:**

$$X =^t (x_1, \ldots, x_n) \qquad y =^t (y_1, \ldots, y_n)$$

Exemple 2 *(Sur l'espace des fonctions continues sur un segment).* On définit **le produit scalaire usuel** sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ par :

$$\boxed{(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}$$

On vérifiera que c'est bien une forme bilinéaire symétrique positive, le caractère défini provient de ce que si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ vérifie $(f|f) = 0$, la fonction $g = f^2$ est **positive**, **continue** et d'intégrale nulle sur le segment $[a, b]$ donc est nulle.

Exemple 3. $(f|g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ sur l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues périodiques de période 2π, à valeurs réelles.

Exercice 1. Soit w une fonction positive, continue par morceaux sur un intervalle I et telle que, pour tout entier naturel n, la fonction :

$$t \mapsto t^n w(t)$$

soit intégrable sur I.

1. Prouver que, pour tout polynôme P, la fonction :
$$t \mapsto P(t)w(t)$$
est intégrable sur I.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le scalaire $\int_I w(t)\,\mathrm{d}t$ pour que l'application :
$$(P,Q) \mapsto \int_I P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$
définisse un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit (E,S) un espace préhilbertien réel. Alors, pour tout couple (x,y) de vecteurs de E, on dispose de* **l'inégalité de Cauchy-Schwarz :**
$$\boxed{|S(x,y)| \leq \sqrt{S(x,x)}\sqrt{S(y,y)}}$$

Remarque 1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est encore vraie si S est seulement une forme bilinéaire symétrique positive. Par exemple, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un segment J :
$$\boxed{\int_J |f(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_J f(x)^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_J g(x)^2\,\mathrm{d}x}}$$

Démonstration. On fait la preuve lorsque S est une forme bilinéaire symétrique positive. Soient x et y deux vecteurs de E, on pose, pour $\lambda \in \mathbf{R}$:
$$T(\lambda) = S(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$$
En développant $T(\lambda)$ *via* la bilinéarité et la symétrie de S, il vient :
$$T(\lambda) = S(y,y)\lambda^2 + 2S(x,y)\lambda + S(x,x)$$
Deux cas se présentent alors :

1) $\underline{S(y,y) \neq 0}$ **:** T est un trinôme de signe constant sur $\mathbf{R}$, donc de discriminant réduit négatif *ie* :
$$[S(x,y)]^2 - S(x,x)S(y,y) \leq 0$$
qui entraine l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) $\underline{S(y,y) = 0}$ **:** T est alors une fonction affine sur $\mathbf{R}$ qui ne peut rester positive que si $S(x,y) = 0$ d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

□

Proposition 2 (Cas d'égalité). *Sous les hypothèses de la proposition 1, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité si et seulement si le système (x,y) est lié.*

Remarque 2. **Attention** le caractère **défini** de S intervient ici.

Démonstration. En distinguant les deux cas, $x = 0$, $y = \lambda x$ qu'on reporte dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit que si (x,y) est lié alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité.
Réciproquement supposons que :
$$[S(x,y)]^2 - S(x,x)S(y,y) = 0$$
- Si $y = 0$ le système (x,y) est lié.
- Si $y \neq 0$, $S(y,y) > 0$ puisque S est **définie**. Le trinôme T défini ci-dessus possède donc une racine double λ d'où :
$$S(x+\lambda y, x+\lambda y) = T(\lambda) = 0$$
et le vecteur $z = x + \lambda y$ est nul puisque S est **définie**.

□

Voici deux exemples à connaitre à fond.

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$). *Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ deux suites finies de n réels, alors :*
$$\boxed{\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

Démonstration. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique pour les vecteurs :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

□

Remarque 3. On a une inégalité meilleure, qui sert souvent en analyse, en appliquant la précédente aux vecteurs $u = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $v = (|y_1|, \dots, |y_n|)$

Proposition 4 (L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions). *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un* **segment** $J = [a, b]$. *Alors :*

$$\boxed{\left|\int_J f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_J f(x)^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_J g(x)^2\,\mathrm{d}x}}$$

au surplus, si f et g sont **continues** *sur J, il y a égalité dans cette formule si et seulement si le système (f, g) est lié dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$.*

Démonstration. **Inégalité :** soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur J, à valeurs réelles. L'application $S : E \times E \to E$ définie par :

$$S(f, g) = \int_J f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

est une forme bilinéaire symétrique positive. C'est donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour f et g dans E.

Égalité : si on remplace maintenant E par $\mathcal{C}(J, \mathbf{R})$, S est un produit scalaire. Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz fait l'objet de la proposition 2.

□

Exercice 2. A quelle conditions les fonctions f et g, continues sur le segment J vérifient-t-elles :

$$\int_J f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\int_J f(x)^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_J g(x)^2\,\mathrm{d}x}\ ?$$

Norme associée à un produit scalaire

Définition 2. Une **norme** sur un espace vectoriel réel E est une application $N : E \to \mathbf{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes.

1. Pour tout vecteur x de E, $\boxed{N(x) \geq 0}$.
2. Pour tout vecteur x de E :
$$\boxed{N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0}$$
3. Pour tout couple (λ, x) de $\mathbf{R} \times E$:
$$\boxed{N(\lambda x) = |\lambda| N(x)|}$$
(Cela entraine, en particulier que, pour $x \in E$: $N(-x) = N(x)$)
4. Pour tout couple (x, y) de $E \times E$:
$$\boxed{N(x + y) \leq N(x) + N(y)}$$
qui s'appelle **inégalité triangulaire pour le couple** (x, y)**.**

– Un **espace vectoriel normé** (réel) est un tel couple (E, N).
– Si N vérifie toutes ces propriétés sauf la propriété 2, on dit que c'est une **semi norme sur** E**.**

Notation 2. N se note généralement par une double barre : $||x||$.

Exemple 4 *(Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$).* Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.
– Norme 1 :
$$\boxed{||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$
– Norme infinie :
$$\boxed{||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|}$$
– Norme 2 :
$$\boxed{||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

Ces normes sont aussi notées N_p $p \in 1, 2, \infty$.
Il est facile de prouver que N_1 et N_∞ sont des normes. On prouvera dans la suite que N_2 est la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 5. *Soit N une semi norme sur E. Pour tout couple (x, y) de $E \times E$:*

$$\boxed{|N(y) - N(x)| \leq N(y - x)}$$

Démonstration. L'inégalité proposée est équivalente à :

$$-N(y - x) \leq N(y) - N(x) \leq N(y - x)$$

elle même équivalente à la conjonction des deux suivantes :

$$N(x) \leq N(y) + N(y - x) \tag{1.1}$$
$$N(y) \leq N(x) + N(y - x) \tag{1.2}$$

Où l'on reconnait les inégalités triangulaires pour les couples $(y, x - y)$ et $(x, y - x)$. □

Proposition 6. *Soit (E, N) un $\mathbf{R}$ espace vectoriel normé. Pour tout système $x_i, \ldots, x_n$ de vecteurs de E :*

$$\boxed{N(x_1 + \cdots + x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i)}$$

Démonstration. Immédiat par récurrence sur n. □

Proposition 7 (Norme associée à un produit scalaire). *Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace préhilbertien réel. L'application $N : E \to \mathbf{R}$ définie par :*

$$N(x) = \sqrt{(x, x)}$$

est une norme sur E appelée **norme associée au produit scalaire $(\ ,\ )$. On remarquera que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs x et y de E peut alors se récrire sous la forme :**

$$|(x, y)| \leq N(x)\, N(y)$$

Démonstration. On se limite à prouver l'inégalité triangulaire pour les vecteurs x et y qui est le seul point non évident. Comme $N(x)+N(y)$ et $N(x+y)$ sont positifs elle est équivalente à :

$$N(x + y)^2 \leq [N(x) + N(y)]^2 \tag{1.3}$$

Or

$$N(x + y)^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y)$$

ie

$$N(x + y)^2 = N(x)^2 + N(y)^2 + 2(x, y)$$

Il vient donc :

$$[N(x) + N(y)]^2 - N(x + y)^2 = 2\,[N(x)N(y) - (x, y)] \tag{1.4}$$

Cette quantité est positive d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'où l'inégalité 1.3. □

Remarque 4. Si S est une forme bilinéaire symétrique positive sur E, l'application p $E \to \mathbf{R}$ définie par :

$$p(x) = \sqrt{S(x, x)}$$

est une semi norme sur E.

Exercice 3 (Cas d'égalité). Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire pour (x, y) si et seulement si soit $x = 0$, soit $x \neq 0$ et il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$. Que dire des vecteurs $x_i, \ldots, x_n$ tels que :

$$N(x_1 + \cdots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} N(x_i)$$

Proposition 8 (Normes euclidiennes). *Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace préhilbertien réel. On note N la norme associée au produit scalaire $(\ ,\ )$. On a alors les* **identités de polarisation suivantes valables pour tout couple (x, y) de vecteurs de E :**

$$(x, y) = \frac{N(x + y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2} \tag{1.5}$$
$$(x, y) = \frac{N(x + y)^2 - N(x - y)^2}{4} \tag{1.6}$$

qui permettent de "récupérer" le produit scalaire à partir de la norme. En particulier, on dira qu'une norme N sur un espace vectoriel E est euclidienne si l'application $(\ ,\ )$ définie par 1.5 ou 1.6 est un produit scalaire.

Exercice 4. Démontrer que la norme N_1 sur $\mathbf{R}^2$ n'est pas euclidienne.

Proposition 9 (Identité du parallélogramme). *Pour tout couple (x, y) de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, (\ ,\ ))$:*

$$\boxed{||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left[||x||^2 + ||y||^2\right]}$$

En particulier, dans le plan affine euclidien, la somme des carrés des médianes d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses quatre cotés.

Angle de deux vecteurs non nuls dans l'espace

Définition 3. Soient u et v deux vecteurs **non nuls** d'un espace préhilbertien réel $(E, (\ ,\ ))$ dont la norme euclidienne est notée $||\ \ ||$. On appelle **mesure de l'angle dans l'espace des deux vecteurs u et v l'unique scalaire $\theta \in [0, \pi]$ défini par :**

$$\boxed{\cos\theta = \frac{(u, v)}{||u||\,||v||}}$$

Exercice 5. Dans l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, muni du produit scalaire usuel, on note e_n la fonction $x \mapsto x^n$. Soit f un élément non nul de E et θ_n la mesure de l'angle, dans l'espace, des deux vecteurs f et e_n. Calculer $\lim_{n\to\infty} \theta_n$.

1.1.2 Extension aux espaces vectoriels complexes

Produit scalaire hermitien

Définition 4. Un produit scalaire sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel complexe E est une application $f : E \times E \to \mathbf{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

Linéarité à droite

Semi linéarité à gauche : c'est-à dire :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{C},\ f(\lambda x, y) = \overline{\lambda} f(x, y)}$$

Symétrie hermitienne : pour tout couple $(x, y) \in E \times E$:

$$\boxed{f(y, x) = \overline{f(x, y)}}$$

En particulier $f(x, x) \in \mathbf{R}$.

définie positivité

Le couple (E, f) s'appelle **espace préhilbertien complexe. Si E est de dimension finie, on dit hermitien.**

Exemple 5. On étend rapidement les définitions vues dans l'exemple 1.
- Produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$.
- $(f|g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{C})$.
- $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$ sur l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π, à valeurs complexes.

Proposition 10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit $(E, (\ ;|\ ))$ un espace préhilbertien complexe. Pour tous $(x, y) \in E^2$ on a :*

$$\boxed{|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)}$$

Avec d'égalité pour (x, y) lié.

Démonstration. La preuve qui suit est rapide mais on a intérêt à faire une démonstration plus directe calquée sur le cas réel. On sait que E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel réel par restriction du corps des scalaires. Les lecteurs vérifieront que l'application S de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Re}(x|y)$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel E. On peut donc appliquer au couple $(x, y) \in E^2$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz ordinaire pour S :

$$|S(x, y)|^2 \leq \mathrm{Re}(x|x)\ \mathrm{Re}(y|y) \quad ie \quad |S(x, y)|^2 \leq (x|x)\,(y|y)$$

ce qui s'écrit :

$$|\mathrm{Re}(x|y)|^2 \leq (x|x)\,(y|y) \tag{1.7}$$

Mais il existe un réel θ tel que

$$(x|y) = \mathrm{e}^{i\theta}\ |(x|y)|$$

Appliquons l'inégalité 1.7, vraie pour tout couple de vecteurs de E, au couple de vecteurs $(\mathrm{e}^{i\theta}\,x, y)$:

$$\left|\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}\,x|y)\right|^2 \leq (\mathrm{e}^{i\theta}\,x|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,x)\,(y|y)$$

Or :

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}\,x|y) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-i\theta}\,(x|y)\right] = \mathrm{Re}\,|(x|y)| = |(x|y)|$$

et :

$$(\mathrm{e}^{i\theta}\,x|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,x)\,(y|y) = (x|x)\,(y|y)$$

D'où l'inégalité voulue.
Le cas d'égalité : même idée qui consiste à "faire tourner un complexe" pour le ramener à un réel positif. Supposons que :

$$|(x|y)|^2 = (x|x)\,(y|y)$$

On choisit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que :

$$(x|y) = \mathrm{e}^{i\theta}\,|(x|y)|$$

Il vient alors, vec les notations ci-dessus :

$$S(\mathrm{e}^{i\theta}\,x, y) = |(x|y)|^2 = (x|x)\,(y|y) = S(\mathrm{e}^{i\theta}\,x|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,x)\,S(y,y)$$

Les vecteurs $\mathrm{e}^{i\theta}\,x$ et y sont donc liés dans l'espace **vectoriel réel** E donc :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}\ /\ \alpha\,\mathrm{e}^{i\theta}\,x + \beta\,y = 0$$

En posant $\lambda = \mathrm{e}^{i\theta}\,\alpha$ et $\mu = \beta$:

$$(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^2 - \{(0,0)\} \quad \text{et} \quad \lambda\,x + \mu\,y = 0$$

Réciproquement, si (x, y) est lié et si $x = 0$ les deux membres de l'inégalité CS sont nuls ; si $x \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $y = \lambda\,x$ et on vérifie sans peine que :

$$|(x|y)|^2 = |\lambda|^2(x|x)^2 = (x|x)\,(y|y)$$

□

Norme associée

Définition 5. Analogue aux espaces préhilbertiens réels. C'est l'application :

$$x \mapsto \sqrt{(x|x)} = ||x||$$

Proposition 11.
- *Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E :*

$$\boxed{||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,\mathrm{Re}(x|y)}$$

- *Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E :*

$$\boxed{||x+y|| \leq ||x|| + ||y||}$$

(Égalité en exercice)
- *Pour tout $x \in E$:*

$$\boxed{||\lambda x|| = |\lambda|||x||}$$

- $\boxed{||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0}$. *C'est une norme sur E*

Proposition 12 (Égalité de la médiane. Identité de Polarisation). *Pour tout couple (x, y) de vecteurs d'un espace préhilbertien complexe $(E, (\ ,\ ))$:*

$$\boxed{||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left[||x||^2 + ||y||^2\right]}$$

$$\boxed{4(x|y) = ||x+y||^2 - ||x-y||^2 + \mathrm{i}\,||x-\mathrm{i}y||^2 - \mathrm{i}\,||x+\mathrm{i}y||^2}$$

Exemple 6. **(Fonctions de carré intégrable)** Soit E l'espace vectoriel complexe des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs complexes. On note E_2 le sous ensemble de E constitué des fonctions f telles que $|f|^2$ soit intégrable sur I. Pour $f \in E_2$, on pose :

$$\boxed{N_2(f) = \sqrt{\int_I |f|^2}}$$

Alors, si f et g appartiennent à E_2, fg est intégrable sur I et on a l'inégalité :

$$\boxed{N_1(fg) = \int_I |f(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_I |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_I |g(x)|^2\,\mathrm{d}x} = N_2(f)N_2(g)}$$

Il en résulte

– Que E_2 est un sous espace vectoriel de E
– Que l'application (,) définie par :

$$\forall f, g \in E,\ (f|g) = \int_I \overline{f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur E_2 qui en fait un espace préhilbertien complexe.
– Qu'on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{|(f|g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)N_2(g)}$$

Exemple 7 (Suites de carré sommable). De même, l'ensemble $l^2(\mathbf{N}, \mathbf{C})$ des suites compexles (u_n) telles que $\boxed{\sum_{n \geq 0} |u_n|^2 < +\infty}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ muni d'un produit scalaire défini par :

$$\boxed{(u|v) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} v_n}$$

où $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$.

1.2 Orthogonalité

1.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Dans cette section, on note $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel ou complexe. La norme d'un vecteur $x \in E$ sera notée $||x||$. La lettre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ si l'espace est préhilbertien réel, $\mathbf{C}$ sinon.

Définition 6 (Vecteurs unitaires). Un vecteur $u \in E$ est dit **unitaire** si $||u|| = 1$. Si $x \in E - \{0\}$ et si E est préhilbertien **réel**, il existe deux vecteurs unitaires colinéaires à x qui sont $\pm u$ avec :

$$\boxed{u = \frac{x}{||x||}}$$

Si, au contraire, E est préhilbertien complexe, il en existe une infinité qui sont donnés par :

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} \frac{x}{||x||} \qquad \theta \in \mathbf{R}}$$

Définition 7. Deux vecteurs x et y appartenant à E sont dits **orthogonaux** si $(x|y) = 0$. On note $x \perp y$

Proposition 13. *On a les propriétés suivantes dont la démonstration est laissée au lecteur.*
– *L'orthogonalité entre deux vecteurs est une relation symétrique.*
– *Si x est orthogonal aux x_i $(1 \leq i \leq n)$, il est orthogonal à toute combinaison linéaire d'iceux.*
– $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$.

Définition 8 (Sous espaces orthogonaux). Deux sous espaces F et G de E sont dits **orthogonaux** si :

$$\boxed{\forall (f, g) \in F \times G,\ f \perp g \quad \text{on note alors} \quad F \perp G}$$

Deux tels sous espaces sont en somme directe ; leur somme (directe) est encore notée :

$$\boxed{F \overset{\perp}{\oplus} G}$$

Démonstration. Si $x \in F \cap G$, $x \perp x$ donc $x = 0$. □

Proposition 14 (Généralisation). *Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous espaces vectoriels de E orthogonaux deux à deux, ils sont alors en somme directe. Cette somme directe sera notée :*

$$\boxed{E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \ldots \overset{\perp}{\oplus} E_n = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq i \leq n}} E_i}$$

Démonstration. On écrit une relation du type :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \quad \text{avec} \quad x_j \in E_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq n$$

On en fait le produit scalaire par $x_i \in E_i$. Comme $x_j \perp x_i$ pour $j \neq i$, il reste $(x_i|x_i) = 0$ d'où $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Proposition 15. *Soient $E_1, \ldots, E_n$, F des sous espaces vectoriels de E. Si F est orthogonal à chaque E_i, il est orthogonal à $\sum_{i=1}^{n} E_i$.*

Démonstration. Car, si $f \in F$ et $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$, x s'écrit $\sum_{j=1}^{n} x_j$ avec $x_j \in E_j$ pour $1 \leq j \leq n$, donc $x \perp f$ d'après la proposition 13. □

Définition 9 (Orthogonal d'un sous espace). Si F est un sous espace vectoriel de E, l'ensemble :

$$\boxed{F^{\perp} = \{x \in E,\ \forall f \in F, x \perp f\}}$$

est un sous espace vectoriel de E, on le note aussi $\boxed{F^{\circ}}$.

1.2.2 Supplémentaires et projecteurs orthogonaux

Définition 10 (Projecteurs orthogonaux). Un projecteur p d'un espace préhilbertien $(E, (\ |\ ))$ est dit **orthogonal** s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes.

1. $\boxed{\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p}$. Ces deux espaces sont donc des supplémentaires orthogonaux de E.
2. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E :

$$\boxed{(x|p(y)) = (p(x)|y)}$$

on dira aussi que p est autoadjoint (*cf* *infra*).

3. Pour tout $x \in E$:

$$\boxed{(x|p(x)) = ||p(x)||^2}$$

Démonstration. -

1 entraine 2 : il suffit, pour vérifier 2, de décomposer x et y en somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$.

2 entraine 3 : on applique 2 avec $y = p(x)$. On en donnera une interprétation géométrique avec un dessin.

3 entraine 1 : on prend $f \in \operatorname{Ker} p$ et $g \in \operatorname{Im} p$ et on applique 3 à $x = f + g$.

□

1.2.3 Familles orthogonales et orthonormales

Définition 11. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si les vecteurs x_i sont orthogonaux deux à deux ; elle est dite **orthonormale** si elle est orthogonale et si tous les vecteurs x_i sont unitaires.

Remarque 5. Si la famille (x_i) est orthogonale **et si tous les** x_i **sont non nuls**, la famille (y_i), obtenue en les normant est orthonormale.

Voici deux exemples qu'on étudiera en détail en analyse.

Exemple 8. Prenons $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbf{R})$. Le produit scalaire est défini par :

$$(f|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

La famille $(f_n)_{n \in N}$, de vecteurs de E, définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 0 \\ \cos(p+1)t & \text{si } n = 2p+1 \text{ avec } p \geq 0 \\ \sin pt & \text{si } n = 2p \text{ avec } p \geq 1 \end{cases}$$

est orthonormale.

Exemple 9. Prenons $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbf{C})$. Le produit scalaire est défini par :

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x$$

La famille $(f_n)_{n \in Z}$, de vecteurs de E, définie par :

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{int}$$

est orthonormale.

Exercice 6. On prend $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbf{R})$. Vérifier qu'on y définit un produit scalaire en posant :

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

On note T_n l'unique polynôme tel que :

$$\forall \theta \in \mathbf{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

Etablir que la famille (T_n) est orthogonale. La normer.

Proposition 16. *Une famille orthogonale* (x) *de vecteurs* **non nuls** *de* E *est libre au sens suivant : toute sous famille finie de* (x) *est libre.*

Démonstration. Il suffit de prouver qu'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, orthogonaux deux à deux et non nuls est libre. On écrit une relation :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 \quad \lambda_j \in \mathbf{K}$$

On en fait le produit scalaire avec x_i ; il reste :

$$\lambda_i ||x_i||^2 = 0$$

donc $\lambda_i = 0$ puisque $x_i \neq 0$. □

Proposition 17 (Relation de Pythagore). *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthonormale finie de E, il vient :*

$$\boxed{||x_1 + \cdots + x_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2}$$

En particulier, si p est un projecteur orthogonal, on a, pour $x \in E$:

$$\boxed{||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2}$$

Démonstration. On le prouve pour deux vecteurs orthogonaux x et y en développant :

$$||x+y||^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + (y|y) + (x|y) + (y|x) = (x|x) + (y|y)$$

Puis on raisonne par récurrence sur n en remarquant que x_n est orthogonal à $\sum_{i=1}^{n-1} x_i$.
L'autre propriété découle de ce que $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ qui sont orthogonaux (faire un dessin). □

Exercice 7. Montrer qu'un projecteur p d'un espace préhilbertien E vérifie :

$$\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leq ||x||$$

si et seulement si il est orthogonal.

Chapitre 2

Espaces euclidiens

2.1 Bases orthonormales

2.1.1 Existence et construction

Définition 12 (Espace euclidien). Un espace vectoriel euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemple 10. $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique (ou naturelle.)

Théorème 1. *Tout espace euclidien possède une base orthonormale.*

Démonstration. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On va vérifier, pour $1 \leq k \leq n$, l'hypothèse de récurrence (H_k) suivante :

tout sous espace de E de dimension k possède une base orthonormale

C'est clair pour $k = 1$, supposons le vrai pour $k \leq n-1$ et prouvons le pour $k+1$.
Soit F un sous espace de E de dimension $k+1$. Choisissons un vecteur $u \in F$, non nul qu'on peut donc rendre unitaire. Considérons la forme linéaire ϕ définie sur F par :

$$x \mapsto (u|x)$$

$\phi \neq 0$ car $\phi(u) = (u|u) = 1$. $\operatorname{Ker}\phi$ est donc un hyperplan H de F auquel on peut appliquer l'hypothèse H_k. Si $(u_1, \dots, u_k)$ est une base orthonormale de H, la famille :

$$(u_1, \dots, u_k, u)$$

est une base orthonormale de F puisque u est unitaire et orthogonal à tous les u_i, $i \leq k$. □

Ce résultat n'est pas très constructif. On va prouver mieux mais d'abord un résultat préliminaire qui servira constamment dans la suite.

Lemme 1. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien et F un sous espace* **de dimension finie** *de E, x un vecteur de E, il existe un et un seul vecteur $f \in F$ et tel que $x - f \perp F$. En outre, si $x \notin F$:*

$$\boxed{F \oplus \operatorname{Vect}(x) = F \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Vect}(x-f)}$$

Ce vecteur f est appelé **la projection orthogonale de x sur F et noté $P_F(x)$. Si $(f_1, \dots f_p)$ est une base orthonormale de F, il est donné par :**

$$\boxed{P_F(x) = \sum_{j=1}^{p} (f_j|x)\, f_j}$$

Démonstration. -

1) Existence et unicité de f : Si $F = \{0\}$, il est clair que seul $f = 0$ convient. Supposons $\dim F = p \geq 1$ et munissons le d'une base orthonormale $(f_1, \dots, f_p)$. Si f répond aux conditions voulues, il existe des scalaires $(\lambda_i)_{i \leq i \leq p}$ tels que :

$$f = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j$$

$x - f$ est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à chacun des f_i *ie* pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$0 = (f_i|x-f) = (f_i|x) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (f_i|f_j) = (f_i|x) - \lambda_i$$

Le vecteur $f \in F$ défini par :

$$f = \sum_{j=1}^{p} (f_j|x)\, f_j$$

est donc l'unique vecteur de F tel que $x - f \perp F$.

2) Sous espace somme : F et $\mathrm{Vect}(x)$ sont en somme directe car $x \notin F$. De même $x - f \notin F$ car sinon $x = (x - f) + f$ y appartiendrait. Il vient donc, puisque $F \perp \mathrm{Vect}(x - f)$:

$$F + \mathrm{Vect}(x - f) = F \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(x - f)$$

Posons $G = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et $H = F \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(x - f)$. H contient F et contient x car

$$x = \overbrace{x - f}^{\in H} + \overbrace{f}^{\in F \subset H}$$

il contient donc G. On prouve de même que $H \subset G$

□

Théorème 2. *Soit $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien et F un sous espace* **de dimension finie** *de E, on a les propriétés suivantes.*

-
$$\boxed{E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}}$$
- *La projection orthogonale P_F, définie au lemme 1, est le projecteur, nécessairement orthogonal, d'image F et de noyau $F^{\perp}$.*
- **Si E est de dimension finie**, *il en est de même de tout sous espace F de E et :*
$$\boxed{\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E}$$

Exemple 11. Voici une procédure Maple *projection* qui prend en argument :
- un vecteur V,
- une base *base* de l'espace F sur lequel on projette donnée sous forme d'une liste de vecteurs,
- un produit scalaire S,

et qui retourne la projection de V sur le sous espace F en résolvant tout bêtement un système déquations linéaires. On l'applique au calcul de la projection orthogonale de $x \mapsto \ln x$ sur le sous espace $\mathbf{R}_5[X]$ de l'espace préhilbertien des fonctions continues sur $]0, 1]$ de carré intégrable.

```
projection:=proc(V,base,S) local tab,eqns,incs,i,n,P;
   n:=nops(base);
   tab:=array(1..n);P:=sum(tab[i]*base[i],i=1..n);
   eqns:={seq(S(V-P,base[i]),i=1..n)};
```


15 janvier 2004

```
   incs:={seq(tab[i],i=1..n)};
   subs(solve(eqns,incs),P) end;

S:=(f,g)->int(f*g,x=0..1);

canon:=proc(n) local i;
 [seq(x^i,i=0..n-1)] end;

projection(ln(x),canon(6),S);
```

$$-\frac{71}{15} + 35\,x - 140\,x^2 + 280\,x^3 - \frac{525}{2}\,x^4 + \frac{462}{5}\,x^5$$

Proposition 18 (Algorithme de Schmidt). *On considère une famille libre $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de E. Notons $V_0 = \{0\}$ et $V_k = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$ pour $1 \le k \le p$. Posons, pour $1 \le k \le p$:*

$$\boxed{u_k = x_k - P_{V_{k-1}}(x_k)}$$

Alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ possède les propriétés suivantes.
- *Pour $1 \le k \le p$:*
$$\boxed{\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k) = V_k}$$
- *La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre et orthogonale.*
- *$(u_1, \ldots, u_{k-1})$ ayant été construits, u_k est donné par :*
$$\boxed{u_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(u_j|x_k)}{||u_j||^2} u_j}$$

Démonstration. On prouve, par récurrence sur k que $V_k = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$, ce qui résulte de la deuxième partie du lemme 1. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est donc libre. Elle est orthogonale car, pour $2 \le k \le p$, u_k est orthogonal à V_{k-1} donc aux u_i avec $1 \le i \le k - 1$ qui sont dedans.
La formule donnant u_k s'établit comme dans la démonstration du lemme 1. □

Exercice 8. Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est caractérisée par les propriétés suivantes.
- Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$: $x_k - u_k \in V_{k-1}$.
- $u_k \perp V_{k-1}$

Mise en oeuvre de l'algorithme

Exemple 12 *(En Maple).* La fonction GramSchmidt est disponible dans la bibliothèque linalg. Elle exécute l'algorithme précédent dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

```
with(linalg):
>u1 := vector([2,2,2]);

>u2 := vector([0,2,2]);

>u3 := vector([0,0,2]);

>GramSchmidt([u1,u2,u3]);
```

$$\left[[2,2,2],\ \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right],\ [0,-1,1]\right]$$

Théorème 3 (Complétion d'une famille orthonormale). *Dans un espace euclidien $(E, (\,|\,))$, toute famille libre orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E.*

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_k)$ une famille orthonormale de k éléments. Complétons la en une base de E :

$$(x_1, \dots, x_p)$$

On pose alors : $V_0 = \{0\}$ et $V_k = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et :

$$u_k = x_k - P_{V_{k-1}}(x_k)$$

On a vu que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ était une base orthonormale de $V_p = E$. D'autre part, pour $1 \le i \le k$, $x_i \perp \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_{i-1}) = V_{i-1}$, donc $P_{V_{i-1}}(x_i) = 0$ et $x_i = u_i$. La famille $(u_k)_{1 \le k \le p}$ est donc une complétion orthogonale de $(x_1, \dots, x_k)$ qu'il reste à normer. □

2.1.2 Polynômes orthogonaux

L'algorithme de Schmidt n'est pas au programme,encore plus particulièrement quand on ne travaille pas en dimension finie. L'exemple des polynômes orthogonaux sert à montrer comment on peut mettre rapidement en œuvre les résultats prouvés précédemments en utilisant la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie. **Tout est très facile avec des dessins**.

Exemple 13 *(Polynômes orthogonaux).* Soit w une fonction continue, strictement positive sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $-\infty \le a < b \le +\infty$. On désigne par $(E, (\,|\,))$ l'espace préhilbertien des fonctions continues sur $]a, b[$, à valeurs réelles et telles que la fonction :

$$x \mapsto f(x)^2\, w(x)$$

soit intégrable sur $]a, b[$. Le produit scalaire sur E est défini par :

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) w(x)\, dx$$

On suppose, de plus, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $x \mapsto x^n w(x)$ est intégrable sur $]a, b[$ de sorte que $\mathbf{R}[X] \subset E$ (en identifiant polynôme et fonction polynômiale).

1. Montrer l'existence d'une unique suite (P_n) de polynômes telle que :
   - P_n est de degré n et unitaire (de coefficient dominant 1),
   - pour $i \ne j$, $P_i \perp P_j$.
2. Prouver l'existence de deux suites $(a_n)_{n \ge 1}$ et $(b_n)_{n \ge 0}$ de réels telles que :
   $$\forall n \ge 1, \quad P_{n+1}(x) = (X + a_n) P_n(X) + b_{n-1} P_{n-1}(X)$$
3. Etudier le signe de b_{n-1} et en déduire que les zéros de P_n et P_{n-1} sont réels, simples et entrelacés.
4. On choisit $I =]-1, 1[$ et $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Montrer que P_n est, à un coefficient multiplicatif près à préciser, l'unique polynôme T_n tel que :
   $$\forall \theta \in \mathbf{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
   Préciser les suites (a_n) et (b_n) dans ce cas.

Exemple 14 *(Programmation).* On va maintenant programmer l'algorithme de Gramm-Schmidt pour l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$ muni du produit scalaire S défini par :

$$S(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Attention, on ne manipulera pas de fonctions mais des expressions Maple qui contiennent la variable x par rapport à laquelle seront menées les intégrations.

```
S:=(f,g)->int(f*g,x=-1..1);
```

On décompose l'algorithme en tâches plus simples. On code d'abord le résultat du lemme 1. On se donne une liste $L = [f_1, \dots, f_n]$ d'expressions, supposées non nulles, deux à deux orthogonales qui engendrent le sous espace F et un vecteur y (une expression) qui n'appartient pas à F. Le résultat est la liste L enrichie du vecteur :

$$y - P_F(y) = y - \sum_{j=1}^{n} \frac{S(y, f_j)}{S(f_j, f_j)} f_j$$

```
ajoute:=proc(L,y) local j,f;
 f:=y;
 for j from 1 to nops(L) do
  f:=f-S(y,L[j])*L[j]/S(L[j],L[j])
   od;
 [op(L),f] end;

L1:= ajoute([],x);
L2:=ajoute(L1,x^2);
L3:=ajoute(L2,x^3);
```

$$L3 = \left[x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3\,x}{5}\right]$$

```
S(x,x^3-3*x/5);S(x^2,x^3-3*x/5);
```


$$0$$

$$0$$

```
schmidt:=proc(famille)
 local L,i,f;
 L:=[];
 for i from 1 to nops(famille) do
   L:=ajoute(L,famille[i]);
 od;L
 end;
```

Utilisons cet algorithme pour le calcul des quatre premiers *polynômes de Legendre*.

```
U:=schmidt([1,x,x^2,x^3,x^4]);
```

$$U = \left[1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3\,x}{5}, x^4 + \frac{3}{35} - \frac{6\,x^2}{7}\right]$$

On peut normer un vecteur, puis la liste toute entière *via* :

```
norme:=f->f/ (sqrt(S(f,f)));
map(norme,U);
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{x\sqrt{6}}{2}, \frac{(3\,x^2-1)\,\sqrt{10}}{4}, \frac{(5\,x^3-3\,x)\,\sqrt{14}}{4}, \frac{(105\,x^4+9-90\,x^2)\,\sqrt{2}}{16}\right]$$

Bien entendu, on aura n'importe quelle famille de polynômes orthogonaux en modifiant le produit scalaire, ce qui prend une ligne. Maple possède une bibliothèque *orthopoly* dont on pourra consulter l'aide. Les principales familles de polynômes orthogonaux sont résumées dans le tableau suivant

Nom	Intervalle	Poids
Legendre	$[-1, 1]$	$x \mapsto 1$
Laguerre	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$
Hermite	$]-\infty, +\infty[$	$x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$
Chebyshev	$]-1, 1[$	$x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$

2.1.3 Calculs en base orthonormale

Proposition 19. *L'espace euclidien $(E, (\,|\,))$ est rapporté à une base orthonormale $(e) = (e_1, \dots, e_n)$. Soient $x, y \in E$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, les matrice unicolonne qui les représentent dans (e) :*

1. $\boxed{(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = {}^t XY = {}^t YX}$.
2. $\boxed{||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{{}^t XX}}$.
3. $\boxed{\mathrm{d}(x, y) = ||y - x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2}}$ *(distance de x à y)*

Proposition 20 (Matrice d'un endomorphisme en base orthonormée). *Avec les hypothèses et les notations de la proposition 36, si $u \in \mathcal{L}(E)$, la matrice de u dans la base* **orthonormée** *(e) est la matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définie par :*

$$\boxed{\forall i, j \in [|1, n|],\ a_{ij} = \pi_i\,(u(e_j)) = (e_i|u(e_j))}$$

2.1.4 Représentation d'une forme linéaire

Proposition 21. *Soit $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien.*

L'application de E dans E^* définie par :

$$\boxed{a \mapsto [x \mapsto (a|x)]}$$

est un isomorphisme ce qui signifie que toute forme linéaire ϕ sur E se représente, de manière unique, sous la forme :

$$\boxed{x \mapsto (a|x)}$$

- *En particulier, la forme linéaire π_i qui donne la i-eme coordonnée du vecteur x dans la base* **orthonormée** *(e) est représentée par le vecteur e_i :*

$$\boxed{\pi_i(x) = (e_i|x)}$$

- *Plus généralement si (e) est une base orthonormale de E, les coordonnées dans (e) du vecteur a qui représente ϕ sont :*

$$\boxed{(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))}$$

Ce résultat est faux dans un espace préhilbertien quelconque (cf infra la remarque 6).

Exemple 15. On se place dans l'espace $\mathbf{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$(P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Chercher $A \in \mathbf{R}_3[X]$ qui représente la forme linéaire $P \mapsto P(0)$ pour le produit scalaire $(\ \ |\ \ )$.
2. Déterminer :

$$\inf_{P(0)=1} ||P - X||$$

   Cette borne est-elle atteinte ?

Exercice 9. Soit $n \ge 1$. Généraliser l'exemple précédent à $\mathbf{R}_n[X]$.

2.2 Cas complexe

Définition 13 (Espace hermitien). Il s'agit d'un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

2.2.1 Extension des résultats précédents

Tout ce qui précède s'étend sans changement, à part certains résultats de 2.1.3 et de 2.1.4 qui deviennent :

1. $\boxed{(x|y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j = {}^t\, \overline{X} Y = {}^t\, Y \overline{X}}$,
2. $\boxed{||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \sqrt{{}^t\, \overline{X} X}}$,

3. $\boxed{\mathrm{d}(x,y) = ||y-x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j|^2}}$ (distance de x à y),
4. Le dernier résultat de la proposition 21 devient :

$$\boxed{\left(\overline{\phi(e_1)}, \ldots, \overline{\phi(e_n)}\right)}$$

5. La proposition 20 demeure inchangée.

2.3 Retour sur les projections orthogonales

On reprend dans le cas général des choses déja vues précédemment.

Dans cette partie les espaces sont préhilbertiens réels ou complexes mais ne sont plus obligatoirement de dimension finie, nous préciserons les hypothèses faites dans chaque cas

Théorème 4 (Fondamental). *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien et F un sous espace de E* **de dimension finie**. *L'orthogonal $F^\perp$ (ou F°) de F est un supplémentaire de E. La projection orthogonale P_F définie dans le lemme 1, qui associe à un vecteur $x \in E$ l'unique vecteur $f \in F$ tel que $x - f \perp F$, est* **le projecteur (nécessairement orthogonal) d'image F et de noyau $F^\perp$** *(ou, si l'on préfère, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$).*

Démonstration. On sait déja que F et $F^\perp$ sont en somme directe, reste à voir que cette somme directe est égale à E. Cela résulte du lemme 1. □

Remarque 6. Ce résultat est faux si l'espace F n'est pas de dimension finie même s'il admet un supplémentaire de dimension finie. par exemple soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel noté $(\ ,\ )$. Soit F l'hyperplan noyau de la forme linéaire non nulle $f \mapsto f(0)$, alors $F^\perp = \{0\}$.
Il en résulte un contre exemple de la proposition 36 si l'espace n'est pas de dimension finie : il n'existe pas de fonction $g \in E$ telle que :

$$\forall f \in E,\ (f, g) = f(0)$$

Soit $f \in F^\perp$. Soit g la fonction $x \mapsto xf(x)$. $g \in F$ donc $f \perp g$. Il s'ensuit que $\int_0^1 xf(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$, comme c'est une fonction positive et continue sur $[0,1]$ elle est nulle donc f est nulle sur $]0,1]$ et donc sur $[0,1]$ par continuité en 0. □

Proposition 22. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien et F un sous espace de E* **de dimension finie** *alors :*

$$\boxed{F^{\circ\circ} = F}$$

Démonstration. Démonstration. On a $F \subset F^{\circ\circ}$ dans tous les cas. Soit maintenant $x \in F^{\circ\circ}$. Alors $x \perp (x - P_F(x)) \in F^\circ$ comme $P_F(x) \perp (x - P_F(x))$, il vient $(x - P_F(x)) \perp (x - P_F(x))$ donc $x - P_F(x) = 0$ et $x \in F$. □

Proposition 23. *(Retour sur le théorème 2)*
Si $(E, (\ |\ ))$ est un espace euclidien ou hermitien et F un sous espace de E alors :

$$\boxed{\dim E = \dim F + \dim F^\circ}$$

Démonstration. Comme tous les espaces sont de dimension finie il vient :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\circ$$

□

Exercice 10. Soient F et G deux sous espaces d'un espace préhilbertien E.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$ et qu'il y a équivalence si E est de dimension finie.
3. On suppose que E est de dimension finie, démontrer que :
$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$
4. E est supposé de dimension finie. Soient $(\phi_i)_{1 \le i \le n}$ et ϕ des formes linéaire sur E telles que :
$$\bigcap_{1 \le i \le n} \operatorname{Ker} \phi_i \subset \operatorname{Ker} \phi$$
En représentant les formes linéaires par des vecteurs, montrer que ϕ est combinaison linéaire des ϕ_i.

Proposition 24 (Expression analytique en base orthonormale). *Soit* $(E, (\ |\ ))$ *un espace préhilbertien et* F *un sous espace de* E **de dimension finie** *muni d'une base* **orthonormale** $(f_1, \cdots, f_n)$. *Si* $x \in E$ *alors :*

$$\boxed{P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (f_j|x)\, f_j}$$

Démonstration. Prouvé dans le lemme 1. □

Exercice 11. Soit E l'espace préhilbertien réel des fonctions continues et de carré intégrable sur $]0, 1]$. Calculer la projection orthogonale de la fonction ln sur le sous espace F de E engendré par $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.

Définition 14 (Distance d'un point à un sous espace de dimension finie). Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien, $x \in E$ et F un sous espace de E **de dimension finie** : la fonction qui, à tout élément $f \in F$ associe

$$||x - f||$$

atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $P_F(x)$. On note alors :

$$\boxed{\mathrm{d}(x, F) = \min_{f \in F} ||x - f|| = ||x - P_F(x)||}$$

(distance de x à F) On a la relation :

$$\boxed{||x||^2 = ||P_F(x)||^2 + ||x - P_F(x)||^2 = ||P_F(x)||^2 + d(x, F)^2}$$

donc $\boxed{||P_F(x)|| \leq ||x||}$. En particulier, si F est muni d'une base **orthonormale** $(f_1, \cdots, f_n)$, on a **l'inégalité de Bessel** :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} |(f_j|x)|^2 \leq ||x||^2}$$

Démonstration. En cours avec des tas de dessins. □

Exercice 12. On reprend les notations et hypothèses de l'exercice 6 en notant $||\ \ ||$ la norme associée au produit scalaire $(\ |\ )$. Soit $f \in E$ et $P_n = \frac{T_n}{||T_n||}$. Montrer, à l'aide du théorème d'approximation polynômiale de Weierstrass, que :

$$\lim_{n \to \infty} \left|\left| f - \sum_{k=0}^{n} (P_k|f)\, P_k \right|\right| = 0$$

2.4 Adjoint d'un endomorphisme

Proposition 25 (Représentation d'une forme bilinéaire). *Soit* B *une forme bilinéaire sur un espace euclidien* $(E, (\ |\ ))$. *Il existe un et un seul endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que :*

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ B(x, y) = (x|u(y))}$$

On dit que l'endomorphisme u **représente la forme bilinéaire** B.

Proposition 26. *On conserve les hypothèses et les notations de la proposition précédente. Si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base* **orthonormale** *de* E *alors :*

$$\boxed{\mathrm{Mat}(u, (e)) = [B(e_i, e_j)]_{1 \leq i,j \leq n}}$$

Cette matrice est aussi appelée **Matrice de la forme bilinéaire** B **dans la base** E

Définition 15. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, (\ |\ ))$. Il existe un et un seul endomorphisme de E, noté u^* et appelé **adjoint de** u **tel que :**

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad (x|u(y)) = (u^*(x)|y)}$$

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par $X \mapsto AX$. Déterminer $(f_A)^*$ pour le produit scalaire défini par $(X|Y) = \mathrm{Tr}\,({}^tX\,A\,Y)$.

Exercice 14. On munit $\mathbf{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbf{R}} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

On note D l'endomorphisme induit sur $\mathbf{R}_n[X]$ par la dérivation. Déterminer D^*.

Proposition 27 (Matrice de l'adjoint en base orthonormée). *Sous les hypothèses et notations de la définition précédente, la matrice de* u^* *dans une* **base orthonormée** *est la transposée de celle de* u.

Proposition 28. *Soit* $(E, (\ |\ ))$ *un espace euclidien.*

- *l'application* $T : u \mapsto u^*$ *est une symétrie de* $\mathcal{L}(E)$. *En particulier, pour* $u \in \mathcal{L}(E)$, $\boxed{u^{**} = u}$.

– *On note :*

$$\boxed{\mathcal{S}(E) = \operatorname{Ker}(T - \mathrm{Id}) \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}(E) = \operatorname{Ker}(T + \mathrm{Id})}$$

Un élément $s \in \mathcal{S}(E)$ est caractérisé par la relation $\boxed{s^* = s}$ *et s'appelle* **endomorphisme autoadjoint ou symétrique** *de E.*
Un élément $a \in \mathcal{A}(E)$ est caractérisé par la relation $\boxed{a^* = -a}$ *et s'appelle* **endomorphisme antisymétrique** *de E.*

– *La décomposition de $\mathcal{L}(E)$ associée à la symétrie T s'écrit :*

$$\boxed{\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)}$$

plus précisément, tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ se décompose, de manière unique, en la somme d'un endomorphisme symétrique et d'un endomorphisme antisymétrique. Cette décomposition s'écrit :

$$\boxed{u = \frac{u + u^*}{2} + \frac{u - u^*}{2}}$$

Proposition 29 (Matrices des endomorphismes symétriques et antisymétriques en base orthonormale). *Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique resp antisymétrique si et seulement si sa matrice dans une base* **orthonormée** *de E l'est.*

Exemple 16 *(Caractérisation des projecteurs orthogonaux).* On a vu dans la définition 10 qu'un projecteur d'un espace euclidien E est orthogonal si et seulement si il est autoadjoint

Exercice 15. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \in \mathcal{A}(E)$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $(x|u(x)) = 0$.

Proposition 30. *Soit $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien.*

– *Si u et v appartiennent à $\mathcal{L}(E)$ alors :*

$$\boxed{(u \circ v)^* = v^* \circ u^*}$$

– $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$ *donc, si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $u^* \in \mathrm{GL}(E)$ et* $\boxed{(u^*)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*}$.

Théorème 5. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, (\,|\,))$.*

$$\boxed{\operatorname{Ker} u^* = \operatorname{Im} u^{\perp} \quad \operatorname{Im} u^* = \operatorname{Ker} u^{\perp} \quad \operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^* \quad \chi_u = \chi_{u^*}}$$

Si F est un sous espace de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Exercice 16. Déterminer l'adjoint d'un projecteur non orthogonal, d'une symétrie non orthogonale d'un espace euclidien.

Exercice 17. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les sous espaces de $\mathbf{R}^3$ stables par u.

2.5 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

2.5.1 Automorphismes orthogonaux

Définition 16. Un endomorphisme u d'un espace euclidien $(E, (\,|\,))$ est dit **orthogonal** si et seulement si il conserve le produit scalaire, c'est-à dire :

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)}$$

Dans la suite on notera $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de l'espace euclidien E.

Exercice 18. Montrer que, dans cette définition, l'hypothèse de linéarité de u est superflue.

Proposition 31. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, (\,|\,))$, alors u est orthogonal si et seulement si il conserve la norme ie*

$$\boxed{\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||)}$$

Exercice 19. Montrer qu'une application de l'espace euclidien E dans lui même est la composée d'un endomorphisme orthogonal et d'une translation si et seulement si elle conserve les distances entre les points (isométrie) *ie* :

$$\forall x, y \in E,\ ||u(x) - u(y)|| = ||x - y||$$

Proposition 32 (Inversibilité). *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, (\,|\,))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) $u \in \mathrm{O}(E)$.

ii) $u^*u = \mathrm{Id}$.

iii) $u\,u^* = \mathrm{Id}$.

iv) $u \in \mathrm{GL}(E)$ *et* $u^* = u^{-1}$.

En particulier un endomorphisme orthogonal de E est un automorphisme de E.

Proposition 33. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, (\,|\,))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) $u \in \mathrm{O}(E)$.

ii) *L'image d'une base orthonormée donnée de E est une base orthonormée de E.*

iii) *L'image de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E.*

Exercice 20. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que, pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit orthogonal il est nécessaire et suffisant que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[|1, n|]$ on ait $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j)$.

2.5.2 Le groupe orthogonal

Chapitre 3

Rappels et compléments sur le groupe orthogonal d'un espace Euclidien

3.1 Préliminaires

3.1.1 But de cette partie

Cette partie a pour but de faire le point sur quelques questions trop rapidement survolées en cours. **A part les idées de base et ce qui concerne la première année, tout ce qui est écrit ici est hors programme mais il faut avoir quelques vues saines afin de pouvoir aborder certains exercices, et se débrouiller**

3.1.2 Les idées de base

Soit E un espace **euclidien** de dimension ≥ 1 et $f \in \mathrm{O}(E)$.

- Si F est un sous espace de E stable par F,
  - Il en est de même de $F^\perp$. $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$ *car f est injectif et conserve les dimensions des sous espaces.*
  - Soient g et h les endomorphismes induits par f sur F et $F^\perp$, alors :

$$\det(f) = \det(g).\det(h) \text{ et } \chi_f(X) = \chi_g(X).\chi_h(X)$$

  La preuve, déja faite lors du cours sur la réduction des endomorphismes, se fait en écrivant les matrices de f et de $f - \lambda\mathrm{Id}$ dans une

  base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

- $\det f \in \{-1, 1\}$ et $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.
- Les sous espaces $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux **(on observera qu'ils peuvent être réduits à** $\{0\}$**)**.*En effet si $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, il vient :*

$$(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = (f(\overrightarrow{x})|f(\overrightarrow{y})) = (\overrightarrow{x}|-\overrightarrow{y}) = -(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$$

  d'où $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = 0$
- Tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle *(regarder les limites de P en $\pm\infty$ et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ou bien utiliser la décomposition de d'Alembert-Gauss de P)*
- f admet un sous espace stable de dimension 1 ou 2. Rappelons l'idée de la démonstration. On observe que la partie symétrique $g = \frac{f+f^*}{2}$ de f admet un vecteur propre $\overrightarrow{u}$ associée à une valeur propre λ. Deux cas se présentent.

  Premier cas : $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est lié : comme $\overrightarrow{u} \neq 0$, il existe λ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ et la droite $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ est stable par f.

  Deuxième cas : $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est libre : comme $f^* = f^{-1}$, il vient :

$$f^2(\overrightarrow{u}) = 2\lambda f(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}$$

  et le plan $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est stable par f.
- **Enfin et toujours, faire des dessins.**

3.2 Rappels de première année et compléments

3.2.1 Le groupe orthogonal du plan vectoriel euclidien

Dans ce qui suit, on note $R(\theta)$ et $S(\theta)$ les matrices :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On a alors établi les résultats suivants en première année.

Théorème 6. – $\forall\theta \in \mathbf{R},\ R(\theta) \in \mathrm{O}_2^+(\mathbf{R})$.

- $\forall\theta,\theta' \in \mathbf{R}, R(\theta+\theta') = R(\theta).R(\theta')$. *Il en résulte que l'application* $\theta \mapsto R(\theta)$ *est un morphisme du groupe* $(\mathbf{R},+)$ *dans le groupe* $(\mathrm{O}_2^+(\mathbf{R}),.)$. *En particulier* $R(-\theta) = R(\theta)^{-1}$.
- *Le morphisme précédent est surjectif. Il en résulte que le groupe* $(\mathrm{O}_2^+(\mathbf{R}),.)$ *est commutatif.*
- *L'application* $\theta \mapsto S(\theta)$ *est une surjection de* $\mathbf{R}$ *sur* $\mathrm{O}_2^-(\mathbf{R})$. **Attention : $\mathrm{O}_2^-(\mathbf{R})$ n'est pas un groupe pour le produit matriciel.**

Théorème 7. *Soit E_2 un plan vectoriel euclidien, (e) une base orthonormée de E_2.*

- *Si $f \in \mathrm{O}^+(E_2)$, on dit que f est une* rotation. *la matrice de f est, dans la base (e), de la forme $R(\theta)$.* f admet la même matrice dans toute base orthonormée de E_2 de même sens que (e). Elle admet la matrice $R(-\theta)$ dans toute base orthonormée de E_2 de sens contraire à (e). *Le réel θ ne dépend donc (à 2π près) que de la rotation f et de l'orientation de E_2 ; on l'appelle* une mesure de l'angle de f.
- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs unitaires de E_2, il existe une unique rotation f tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.*
- *Si $f \in \mathrm{O}^-(E_2)$, c'est une réflexion. En particulier* $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 1\}$ *et f est diagonalisable.*
- *Dans le plan orienté, toute rotation de E_2 d'angle θ est produit de deux réflexions s_1 et s_2 dont l'une peut être choisie arbitrairement et dont une mesure de l'angle des deux droites vaut $\theta/2$.*

3.2.2 Étude spectrale du groupe orthogonal de l'espace Euclidien de dimension 3

On se propose ici de retrouver les résultats de première année par des considérations spectrales. **Les démonstrations qui suivent sont faciles à comprendre si l'on fait des figures.**

Théorème 8. *Soit $f \in \mathrm{O}^+(E_3)$ telle que $f \neq \mathrm{Id}$, on dit que f est une* **rotation pure**. *Alors :*

- *1 est valeur propre de f . Le sous espace propre associé est une droite appelée* axe de f*,*
- *si D est l'axe de f et P le plan $D^\perp$, f stabilise P et y induit une rotation r.* **Si on oriente E_3 et le plan** P *(par exemple par le choix d'un vecteur unitaire sur D), l'angle de la rotation r s'appelle* angle de f*,*
- *si θ est l'angle de f, la matrice de f dans une base orthonormée directe $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ où $\overrightarrow{K}$ dirige D et $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est une base orthonormée directe de P vaut :*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. -

1) Montrons que $1 \in \mathrm{Sp}(f)$ **:** χ_f est de degré 3 donc admet au moins une racine réelle λ qui est une valeur propre de f et qui vaut donc ±1. Si $\lambda = -1$, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$, $\Delta = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$. Le plan $Q = \Delta^\perp$ est stable par f et l'endomorphisme s que f y induit est une réflexion d'apres 3.1.2 donc s admet 1 comme valeur propre et f aussi.

2) Montrons que le sous espace propre associé est une droite : soit $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ un vecteur unitaire propre pour 1. L'endomorphisme r induit par f sur le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})^\perp$ en est une rotation différente de Id d'après 3.1.2.

$$\chi_f = -(X-1)\chi_r$$

Or χ_r n'admet pas la racine 1 car sinon r serait l'identité et f aussi ; donc la multiplicité de la valeur propre 1 vaut 1, il en résulte $\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \leq 1$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) = 1$. Le reste est identique à ce qui a été fait en première année.

□

Théorème 9. *Si $f \in \mathrm{O}^-(E_3)$ alors $-1 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\dim \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$ peut prendre les valeurs $1, 3$.*

1) Si $\dim \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) = 3$ **:** *alors $f = -\mathrm{Id}$.*

2) Si $\dim \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) = 1$ **:** *alors f est soit une réflexion, soit se décompose de manière unique en le produit commutatif d'une réflexion et d'une rotation pure dont l'axe est orthogonal au plan de la réflexion.*

Démonstration. -

Prouvons que $-1 \in \mathrm{Sp}(f)$ **:** f admet 1 ou -1 comme valeur propre puisque χ_f a au moins une racine réelle. Si 1 est valeur propre, l'endomorphisme

s induit par f sur le plan orthogonal à la droite engendrée par un vecteur $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$, est une réflexion d'après 3.1.2 donc admet la valeur propre -1.

Discussion d'après $\dim \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$ **:** remarquons d'abord que $\dim \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) \neq 2$ car sinon l'orthogonal de cet espace serait une droite D stable par f. Si f est un vecteur unitaire de D, il vient $f(\overrightarrow{u}) = \pm\overrightarrow{u}$ et donc $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ puisque $\overrightarrow{u} \perp \operatorname{Ker}(f+\operatorname{Id})$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\det f$. Donc :

$$\dim \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) \in \{1, 3\}$$

1) Si $\dim \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) = 3$ **:**

$$f = -\operatorname{Id}$$

2) Si $\dim \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) = 1$ **:** soit D la droite $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire qui dirige D et $P = D^\perp$. Soit s la réflexion par rapport à P et $r = s \circ f$. $\det r = 1$ et

$$r(\overrightarrow{u}) = s \circ f(\overrightarrow{u}) = s(-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$$

donc r est soit Id, auquel cas $f = s$, soit une rotation pure d'axe D et $f = s \circ r$.

Prouvons que s et r commutent : si $\overrightarrow{x} \in P$, $r(\overrightarrow{x}) \in P$, et donc $s(r(\overrightarrow{x})) = r(\overrightarrow{x})$ et $r(s(\overrightarrow{x})) = r(\overrightarrow{x})$. Si $\overrightarrow{x} \in D$, $s(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x}$, $r(s(\overrightarrow{x})) = -r(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x} = f(\overrightarrow{x}) = s \circ f(\overrightarrow{x})$. Il en résulte que $r \circ s$ et $s \circ r$ coïncident sur D et P qui sont supplémentaires, donc coïncident.

Prouvons que la décomposition est unique : si f s'écrit sous la forme $\rho \circ \sigma$ où ρ est une rotation pure d'axe Δ et σ une réflexion de plan Π orthogonal à Δ, si $\overrightarrow{v} \in \Delta$, il vient $\sigma(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ et $\rho(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ d'où $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ et $\Delta = D$ d'où $\sigma = s$, il s'ensuit $\rho = r$

□

3.2.3 Comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation

On se place dans un espace euclidien orienté E_3. On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E_3)$, représenté par sa matrice $M \neq I_3$ dans une base

orthonormée directe $(e) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On se propose de prouver que f est une rotation (nécessairement pure puisque $M \neq I_3$) et d'en déterminer l'axe D et une mesure de l'angle en orientant convenablement $P = D^\perp$. Ceci est permis par la proposition suivante.

Proposition 34. *Soit $f \in \mathrm{O}^+(E_3)$ une rotation pure d'un espace E_3 euclidien orienté. Orientons son axe D par le choix d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$. On sait que l'ensemble des bases orthonomée $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ du plan $P = D^\perp$ telles que la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ soit directe définit une orientation de P dite associée à $\overrightarrow{K}$. Une mesure θ de l'angle orienté de f pour cette orientation, (c'est-à-dire l'angle orienté de la rotation induite par f sur P pour l'orientation d'icelui ci-dessus définie) est entièrement déterminée modulo 2π par son cosinus et son sinus. Il vient :*

- *$\cos\theta$ ne dépend pas des orientations, il est donné par :*

$$\boxed{\operatorname{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta}$$

- *soit g la partie antisymétrique de f :*

$$\boxed{g = \frac{f - f^*}{2}}$$

alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{\omega}$ tel que, pour tout $\overrightarrow{x} \in E_3$:

$$\boxed{g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}}$$

et :

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = \sin(\theta)\,\overrightarrow{K}}$$

Démonstration. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$ ayant été choisi sur D, on considère une base orthonormée $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ de $P = D^\perp$ telle que la base orthonormée $(B) = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ de E_3 soit directe. Cette base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ définit l'orientation de P associée à $\overrightarrow{K}$. La matrice R de f **dans cette base** (B) prend, puisqu'elle est orthonormée, la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$ et :

$$\mathrm{Mat}(g,(B)) = \frac{R -^t R}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors les égalités :

$$\boxed{g(\overrightarrow{I}) = \sin\theta\,\overrightarrow{J} = (\sin\theta\,\overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{I}}$$

$$\boxed{g(\overrightarrow{J}) = -\sin\theta\,\overrightarrow{I} = (\sin\theta\,\overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{J}}$$

$$\boxed{g(\overrightarrow{K}) = 0 = (\sin\theta\,\overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{K}}$$

donc g coïncide avec $\overrightarrow{x} \mapsto \sin\theta\overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{x}$ sur la base (B) donc sur E_3. L'unicité de $\overrightarrow{\omega}$ est laissée aux lecteurs. □

Exemple 17. Réduire l'endomorphisme f de E_3 représenté dans une base orthonormée directe $(e) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ par la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

On va préciser les étapes.

1) On vérifie que c'est un automorphisme orthogonal : comme la base (e) est orthonormée, on vérifie que :

$$\boxed{M^t M = I_3}$$

2) On vérifie que c'est une rotation pure : *via* le déterminant :

$$\boxed{\det M = 1 \quad \text{et} \quad M \neq I_3}$$

3) On calcule le cosinus de son angle : celui ci est indépendant de l'orientation :

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,M = 2 = 1 + 2\cos\theta \quad \text{donc} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}}$$

4) On calcule $\overrightarrow{K}$ et $\sin\theta$: la matrice de la partie antisymétrique g de f est, dans (e) :

$$\frac{M -^t M}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche donc, dans la base (e), un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}}$$

tel que, pour tout $\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \in E_3$ on ait $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} = g(\overrightarrow{x})$; or les composantes de $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$ sont, dans la base (e) :

$$\begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ce qui impose :

$$\boxed{c = 0, \qquad a = b = \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

Il vient donc :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta\,\overrightarrow{K} = \overrightarrow{\omega} = \frac{\sqrt{6}}{4}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}$$

On peut donc choisir $\sin\theta$ à l'aide de la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ puis $\overrightarrow{K}$ à l'aide de la dernière relation, ce qui autorise deux choix :

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{K} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}$$

Donc f est la rotation d'angle $\pi/3$ autour du vecteur $\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$. Ou bien, ce qui revient au même :

$$\boxed{\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{K} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}$$

Qui est la rotation d'angle $-\pi/3$ autour du vecteur $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$. **Ces deux interprétations de f sont les mêmes car le changement de $\overrightarrow{K}$ en $-\overrightarrow{K}$ induit un changement d'orientation sur**

$P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{K})^{\perp}$ **qui change θ en son opposé par l'intermédiaire de son sinus.**

Exercice 21 (Exercice d'entraînement corrigé). Le même que l'exemple précédent avec :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $M \in \mathrm{O}_3^+(\mathbf{R})$ et donc que f est une rotation pure.
On trouve, avec les notations de l'exemple précédent :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{7}{18}}$$

$$\boxed{\frac{M - {}^t M}{2} = \frac{5}{18}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

D'où l'on déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = \sin\theta\, \overrightarrow{K} = \frac{5}{18}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})}$$

En choisissant par exemple :

$$\boxed{\sin\theta = \frac{5\sqrt{11}}{18}}$$

On trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})}$$

Donc f est la rotation d'angle $\mathrm{Arccos}\left(\frac{7}{18}\right) \in]0, \pi/2[$ autour de $\overrightarrow{K}$.

Exemple 18. Etudier l'endomorphisme f d'un espace euclidien de dimension 3 représenté, en base orthonormée, par la matrice :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

On travaille avec Maple. On évalue M^tM et $\det(M)$ qui vaut -1. On cherche $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$


```
N:=evalm(M+I3);
L:=nullspace(N):
V:=L[1];
```

$$N := \begin{bmatrix} \frac{17}{9} & 1/9 & -4/9 \\ 4/9 & 5/9 & \frac{7}{9} \\ 1/9 & \frac{8}{9} & \frac{13}{9} \end{bmatrix} \qquad V := [1/3, -5/3, 1]$$

On norme le vecteur $\overrightarrow{V}$ dans le but de fabriquer le projecteur orthogonal P d'image $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{V})$ puis la réflexion H par rapport au plan orthogonal à $\overrightarrow{V}$.

```
U:=evalm((1/norm(V,2))*V);
P:=matrix(3,3,(i,j)->U[i]*U[j]);
H:=evalm(I3-2*P);
```

$$\overrightarrow{U} = [\frac{\sqrt{35}}{35}, -\frac{\sqrt{35}}{7}, \frac{3\sqrt{35}}{35}]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/35 & -1/7 & \frac{3}{35} \\ -1/7 & 5/7 & -3/7 \\ \frac{3}{35} & -3/7 & \frac{9}{35} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{33}{35} & 2/7 & -\frac{6}{35} \\ 2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -\frac{6}{35} & 6/7 & \frac{17}{35} \end{bmatrix}$$

Puis on vérifie que $R = HM$ est la matrice d'une rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{V}$

```
R :  = evalm (H&*M) ;
```

$$R := \begin{bmatrix} \frac{298}{315} & -\frac{11}{63} & -\frac{86}{315} \\ \frac{10}{63} & \frac{62}{63} & -\frac{5}{63} \\ \frac{89}{315} & \frac{2}{63} & \frac{302}{315} \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que $R^tR = I_3$ et que $\det(R) = 1$. On calcule $\frac{(A-{}^tA)}{2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/6 & -\frac{5}{18} \\ 1/6 & 0 & -1/18 \\ \frac{5}{18} & 1/18 & 0 \end{bmatrix}$$

le cosinus de l'angle de R, calculé via la trace, vaut $17/18$. Si $\overrightarrow{K}$ est un vecteur unitaire qui oriente l'axe de R :

$$\sin\theta\ \overrightarrow{K} = \frac{\overrightarrow{i}}{18} - \frac{5\,\overrightarrow{j}}{18} + \frac{\overrightarrow{k}}{18}$$

Donc, en orientant l'axe de R de manière à ce que $\sin\theta \geq 0$:

$$\overrightarrow{K} = \frac{\sqrt{35}\,\overrightarrow{i}}{35} - \frac{\sqrt{35}\,\overrightarrow{j}}{7} + \frac{3\sqrt{35}\,\overrightarrow{k}}{35} \text{ et } \sin\theta = \frac{\sqrt{35}}{18}$$

On retrouve $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{U}$ ce qui était prévu.

Exemple 19. L'espace euclidien E_3 est muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. r est la rotation d'angle $\pi/3$ par rapport à l'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de composantes $(1, 2, 1)$; s est la réflexion par rapport à l'orthogonal de la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$. Etudier $s \circ r$.

On travaille avec la bibliothèque linalg. On définit d'abord la base, un vecteur unitaire $\overrightarrow{N}$ dirigeant l'axe et enfin l'angle de la rotation :

```
i:=vector([1,0,0]);j:=vector([0,1,0]);k:=vector([0,0,1]);
U:=vector([1,2,1]);N:=evalm(1/norm(U,2)*U);
theta:=Pi/3;
```

$$\overrightarrow{N} = [1/6\sqrt{6}, 1/3\sqrt{6}, 1/6\sqrt{6}] \qquad \theta := 1/3\,\pi$$

On a vu en première année que l'image d'un vecteur $\overrightarrow{x} \in E_3$ par la rotation r d'axe $\overrightarrow{N}$ et d'angle θ, **pour l'orientation de** $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{N})^\perp$ **déterminée par** $\overrightarrow{N}$ était donnée par :

$$\boxed{r(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta)\,\overrightarrow{x} + [1-\cos(\theta)]\left(\overrightarrow{N}|\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{N} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{x}}$$

Écrivons une fonction Maple R qui prend $\overrightarrow{x}$ en argument et qui retourne $r(\overrightarrow{x})$:


```
R:=proc(x) global N,theta;
   evalm(cos(theta)*x+
   (1-cos(theta))*dotprod(N,x)*N+
   sin(\theta)*crossprod(N,x))
   end;
```

La matrice de R dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est donnée par :

```
M:=transpose(matrix([R(i),R(j),R(k)]));
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & 1/6 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/12 + 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} \\ 1/6 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 5/6 & 1/6 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} \\ 1/12 - 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/6 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

Écrivons maintenant une procédure Maple qui calcule la matrice de s relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On sait que, si $\overrightarrow{v}$ est le vecteur de coordonnées $(1, -1, 1)$ relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et Π le projecteur orthogonal d'image $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$, alors :

$$\boxed{s = \mathrm{Id} - 2\,\Pi}$$

On écrit d'abord la matrice P de Π :

```
V:=vector([1,-1,1]);n:=evalm(1/norm(V,2)*V);
P:=matrix(3,3,(p,q)->n[p]*n[q]);
I3:=diag(1$3);
S:=evalm(I3-2*P);
```

$$n := [1/3\sqrt{3}, -1/3\sqrt{3}, 1/3\sqrt{3}]$$

$$S := \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

La matrice, relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, de la composée $t = s \circ r$ est alors :

```
T:=evalm(S&*M);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1/4 + 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/2 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & -1/4 \\ 1/2 - 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/2 & 1/2 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} \\ -1/4 & 1/2 + 1/12\sqrt{3}\sqrt{6} & 1/4 - 1/6\sqrt{3}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

T est une matrice orthogonale, de déterminant -1 et symétrique donc :

$$\boxed{I_3 = {}^t T\,T = T^2}$$

Donc t est **une symétrie orthogonale de déterminant -1 donc une réflexion**. Calculons son plan $H = \mathcal{V}(1) = \mathcal{V}(-1)^{\perp}$ après deux petites vérifications :

```
map(expand,evalm(T&*T));
det(T);
```

Maple répond :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -1$$

On calcule enfin un vecteur directeur de $H^{\perp}$:

```
nullspace(evalm(T+I3));
```

$$\left\{[3 - 2\sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, 1]\right\}$$

t est donc la réflexion relativement au plan H dont une équation, relativement à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, est :

$$\boxed{(3 - 2\sqrt{2})\,x + (-2 + \sqrt{2})\,y + z = 0}$$

Ce qu'on aurait pu étudier géométriquement en décomposant r sous la forme $s_1 \circ s_2$ où s_1 est la réflexion relativement au plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3.3 Réduction des automorphismes orthogonaux en dimension n

Théorème 10. *Soit $f \in \mathrm{O}(E_n)$. Il existe une base orthonormée (e) de E_n où la matrice de f admet une représentation par blocs de la forme :*

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & R(\theta_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & R(\theta_p) & & \\ & & & & \mathrm{I}_r & \\ & & & & & -\mathrm{I}_s \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \;\; 2p + r + s = n$$

Où les $R(\theta_i)$ sont des matrices de rotation de taille 2 et où I_k désigne la matrice unité de taille k. Tous les autres blocs non diagonaux sont nuls. Bien entendu certains des entiers p, r, s peuvent être nuls.

Démonstration. -

1) Cas où f n'admet ni 1 ni -1 comme valeur propre : on prouve, par récurrence sur $p \in \{2 \dots n\}$, la propriété (H_p) suivante : si (F, g) est un couple constitué d'un sous espace $F \neq \{0\}$ de E de dimension $\leq p$ et d'un automorphisme orthogonal g de F n'admettant ni 1 ni -1 comme valeur propre alors $\dim F$ est paire et il existe une base orthonormée de F où la matrice de g soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant constitués de matrices de la forme $R(\theta_i)$ avec $\theta_i \notin \pi\mathbf{Z}$.
(H_2) est laissée aux lecteurs, Supposons (H_{p-1}) vérifiée pour un entier p tel que $3 \leq p \leq n$, soit F un sous espace non réduit à $\{0\}$ de E tel que $\dim F \leq p$, muni d'un automorphisme orthogonal g sans valeur propre on a vu *(cf 3.1.2)* que g admet un plan ou une droite stable. Comme g n'admet pas de droite stable, il admet un plan stable P. L'endomorphisme induit par g sur P est une rotation de P puisqu'une réflexion de P admet les valeurs propres 1 et -1. Sa matrice, dans une base orthonormée de P est de la forme $R(\theta)$ où $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$ (car sinon elle aurait 1 ou -1 comme valeur propre). Reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à l'orthogonal du sous espace P dans F muni de l'automorphisme orthogonal qu'y induit g.

2) Cas général : le plus simple est d'observer que le sous espace G (éventuellement réduit à $\{0\}$) :

$$G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$$

est stable par f et que son orthogonal F, qui est stable par f, est tel que l'endomorphisme qu'y induit f n'admet ni 1 ni -1 comme valeur propre.

□

Exercice 22. E est un espace euclidien de dimension n.

1. Soient $(H_1, \dots, H_p)$ p hyperplans de E on note $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ un système de vecteurs tel que n_i dirige la normale à H_i.
2. Trouver une relation entre

$$\dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i \text{ et } \mathrm{rg}(n_1, n_2, \dots, n_p)$$

   On dit que les hyperplans sont *indépendants* si ce rang vaut p.
3. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$, on pose $\dim Ker(f - \mathrm{Id}) = p$, prouver, par deux méthodes, que f se décompose en produit de $n - p$ réflexions par rapport à des hyperplans indépendants.
4. Prouver que si f est un produit de s réflexions alors : $s \geq n - p$.
5. (difficile) Prouver que, si f est un produit de $s \geq 1$ réflexions relativement à des hyperplans indépendants $(H_1, \dots, H_s)$ alors :

$$\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \bigcap_{i=1}^{s} H_i$$

   On pourra, par exemple, raisonner par récurrence sur s.

Chapitre 4

Compléments sur les endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien et les matrices symétriques

4.1 Formes bilinéaires et endomorphismes

Définition 17 (Matrice d'une forme bilinéaire dans une base). Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et B une forme bilinéaire sur E. On appelle matrice de B dans une base $(e) = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E la matrice :

$$\boxed{M = [B(e_i, e_j)]_{1\leq i,j\leq n}}$$

Si X et Y sont les matrices colonnes qui représentent les vecteurs x et y dans la base (e), il vient :

$$\boxed{B(x, y) =^t X\,M\,Y}$$

Démonstration. On écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad x = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

On développe $B(x, y)$ en utilisant la bilinéarité de B :

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, B(e_i, e_j) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j\, B(e_i, e_j) =^t XMY$$

□

Proposition 35. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien, $a \in \mathcal{L}(E)$. L'application B_a de $E \times E$ dans* **R** *définie par :*

$$\boxed{(x, y) \mapsto (x|a(y)) = B_a(x, y)}$$

est une forme bilinéaire dite représentée par a. réciproquement, si B est une forme bilinéaire sur E, il existe un unique $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $B = B_a$. On dit que a **est l'endomorphisme de** *E* **qui représente** *B. De surcroît $a \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si B_a est une forme bilinéaire symétrique.*

Démonstration. Déja vu, c'est ce qui nous a permis de définir l'adjoint d'un endomorphisme. B_a est symétrique si et seulement si :

$$\forall x, y \in E,\ B_a(x, y) = B_a(y, x) \quad ie \quad ((x|a(y))) = (y|a(x)) = (a(x)|y)$$

Ce qui signifie bien que a est un endomorphisme symétrique de E. □

Proposition 36. *Si (e) est une base* **orthonormée** *de E, les matrice de B_a et de a dans la base (e) sont les mêmes. Si $A = \mathrm{Mat(a, (e))}$ et si X et Y sont les matrices colonnes qui représentent les vecteurs x et y dans la base (e), il vient :*

$$\boxed{(x|a(y)) =^t XAY = B_a(x, y)}$$

Démonstration. Déja vu à la proposition 26. Soit $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat(a, (e))}$. Puisque (e) est orthonormée la i-eme composante de $a(e_j)$ dans (e) est donnée par $(e_i|a(e_j))$. Donc :

$$a_{ij} = (e_i|a(e_j)) = B_a(e_i, e_j)$$

Enfin, il vient :

$$(x|a(y)) =^t X(AY) =^t XAY$$

□

Remarque 7 (Expressions quadratiques). En pratique lorsqu'on a une expression de la forme

$$\boxed{Q(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{avec} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \in [|1, n|]}$$

Où les x_i représentent les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans une base orthonormée (e), il faut observer que :

$$\boxed{Q(x) = {}^tXAX = (x|a(x)) = B_a(x,x)}$$

où $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}(a,(e))$.

Proposition 37 (Cas d'une base de diagonalisation). *Soit a un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 1$ et (e) une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de a. Alors, pour tout couple (x,y) de vecteurs de E :*

$$\boxed{(x|a(y)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i y_i \qquad (x|a(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i^2}$$

Où λ_i est la valeur propre de a associée à e_i. Supposons les valeurs propres de a classées par ordre croissant. Si $||x|| = 1$:

$$\boxed{\lambda_1 \leq (x|a(x)) \leq \lambda_n}$$

avec égalité pour e_1 et e_n. En particulier :

$$\boxed{\max_{x\neq 0} \frac{(x|a(x))}{(x|x)} = \lambda_n \qquad \min_{x\neq 0} \frac{(x|a(x))}{(x|x)} = \lambda_1}$$

Exemple 20. Calculer les extréma de :

$$\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Lorsque (x,y,z) décrit $\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Exercice 23. trouver les bornes de la quantité :

$$\frac{\int_{-1}^{1} P'(t)^2 dt}{\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{1-t^2} dt}$$

Lorsque P décrit l'ensemble des polynômes P non nuls de $\mathbf{R}_n[X]$ tels que $P(-1) = P(1) = 0$.

Exercice 24. On reprend les hypothèses et notations de l'exercice 14 page 36. Déterminer l'endomorphisme D^*D. En déduire le plus petit réel tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \int_{\mathbf{R}} P'(x)^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x \leq \lambda \int_{\mathbf{R}} P(x)^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$$

Exercice 25. Comment trouver les bornes de la quantité

$$\frac{(x|f(x))}{(x|x)} \quad x \in E - \{0\}$$

lorsque f est un endomorphisme **quelconque** de l'espace euclidien E ? *(Décomposer f en somme d'un endomorphisme symétrique et d'un endomorphisme antisymétrique).*

4.2 Endomorphismes positifs

Dans cette section tous les endomorphismes et toutes les matrices sont carrées et symétriques réelles

4.2.1 Endomorphismes positifs, matrices positives

Définition 18. On dit qu'un endomorphisme symétrique a d'un espace euclidien E est **positif** si et seulement si B_a est positive *ie* :

$$\boxed{\forall x \in E,\ (x|a(x)) \geq 0}$$

On dit qu'une matrice symétrique réelle, de taille n, A est **positive** si l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique) canoniquement associé à A est positif. Ce qui se traduit par :

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ {}^tX\, A\, X \geq 0}$$

Bien entendu l'endomorphisme symétrique a est positif si et seulement si sa matrice dans une *resp toute* base **orthonormée** de E est positive.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 36. □

Remarque 8 *(Notations).* L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien E est noté $\mathcal{S}^+(E)$. L'ensemble des matrices symétriques réelles positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

Proposition 38 (Caractérisation spectrale). *Un endomorphisme symétrique a d'un espace euclidien E est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives. Une matrice symétrique réelle A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. En particulier, le déterminant d'un endomorphisme symétrique positif ou d'une matrice symétrique positive est toujours positif.*

Démonstration. Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ d'un endomorphisme symétrique positif a. Puisque $x \neq 0$, $(x|x) > 0$ d'où :

$$(x|a(x)) = \lambda(x|x) \quad ie \quad \lambda = \frac{(x|a(x))}{(x|x)} \geq 0$$

Réciproquement si les valeurs propres de a sont positives, il vient, dans une base de diagonalisation de a :

$$(x|a(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

□

Exercice 26. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients de $A \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ pour que celle ci soit positive.

Exercice 27. Soit $a \in \mathcal{S}^+(E)$, prouver que :

$$(x|a(x)) = 0 \Leftrightarrow a(x) = 0$$

4.2.2 Endomorphismes définis positifs

Définitions et résultats analogues que pour les endomorphismes symétriques positifs. **On observera que a est un endomorphisme symétrique défini positif d'un espace euclidien E si et seulement si la forme bilinéaire B_a est un produit scalaire.**

Remarque 9 *(Notations).* L'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs d'un espace euclidien E est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$. L'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Proposition 39.

$$\boxed{\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \mathrm{GL}(E) \qquad \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})}$$

Démonstration. Découle immédiatement de la caractérisation spectrale. □

Exercice 28. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que les extréma de :

$$\frac{{}^t\!XBX}{{}^t\!XAX} \qquad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) - \{0\}$$

sont la plus grande et la plus petite valeur propre de $C = A^{-1}B$. Application : déterminer les extréma de :

$$\frac{xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Exercice 29. En raisonnant comme dans l'exercice précédent dont on conserve les hypothèses et les notations, montrer que la matrice $C = A^{-1}B$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Exemple 21. Soient A et B deux matrices symétriques positives telles que $A \leq B$ c'est-à-dire que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. En commençant par le cas $B = \mathrm{I}_n$, démontrer que $\det A \leq \det B$. Interprétation géométrique ?

Exercice 30. Soient a et b deux endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien E.

1. On suppose $b \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que ab est autoadjoint positif pour S_b. En déduire qu'il est diagonalisable.
2. On reprend le cas général. Montrer que $\mathrm{Sp}\, ab \subset \mathbf{R}^+$. *(On pourra se placer dans une base de diagonalisation de b et se ramener au cas précédent via un calcul par blocs).*
3. Pour $x \in E$, encadrer $||a(x)||$ et $||b(x)||$ à l'aide de $||x||$ et des valeurs propres de a et b. En déduire un encadrement des valeurs propres de ab.

Proposition 40 (Définition d'un produit scalaire). *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$. On se donne une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il existe une et une seule forme bilinéaire B sur $E \times E$ telle que, pour tout couple (i, j) on ait $B(e_i, e_j) = a_{ij}$. On a alors les propriétés suivantes.*

- *Pour x et y appartenant à E, de matrices respectives X et Y dans (e) :*

$$\boxed{B(x, y) = {}^t X\, A\, Y}$$

- *B est symétrique si et seulement si A l'est.*
- *B est symétrique positive si et seulement si A l'est.*
- *B est un produit scalaire si et seulement si A est symétrique, définie, positive.*

Exercice 31. A quelles conditions l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$$

est-elle le carré d'une norme euclidienne sur $\mathbf{R}^2$?

Remarque 10. On déduit de la proposition précédente que si (e) est une base **quelconque** d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension n, on peut munir E d'un unique produit scalaire B tel que la base (e) soit orthonormée. Il suffit d'appliquer cette proposition avec $A = \mathrm{I_n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Exercice 32. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisable, prouver qu'elle peut s'écrire comme produit de deux matrices symétriques réelles dont l'une est définie positive. *(On considérera une base de vecteurs propres de M et on munira l'espace $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire pour lequel ladite base est orthonormée.)*

4.2.3 Racine carrée d'un endomorphisme positif

Proposition 41 (L'endomorphisme u^*u). *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

- *les endomorphisme u^*u et uu^* sont* **symétriques et positifs**. *En particulier, si $u \in \mathcal{S}(E)$, u^2 est symétrique et positif,*
-

$$\boxed{\operatorname{Ker} u^*u = \operatorname{Ker} u \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} uu^* = \operatorname{Im} u}$$

En particulier ces deux endomorphismes ont même rang que u.

Démonstration. -

1) Symétrie : d'aprés les propriétés opératoires de l'adjoint :

$$(u^*u)^* = u^*u^{**} = u^*u$$

Même chose pour uu^*.

2) Positivité : pour $x \in E$:

$$(x|u^*u(x)) = (u(x)|u(x)) \geq 0$$

Même chose pour uu^*.

3) Noyau de u^*u : il est clair que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^*u$. Réciproquement soit $x \in \operatorname{Ker} u^*u$ *ie* $u^*u(x) = 0$ d'òu :

$$0 = (x|u^*u(x)) = (u(x)|u(x)) = ||u(x)||^2$$

Il s'ensuit que $u(x) = 0$ et donc que $x \in \operatorname{Ker} u$. On en conclut que $\operatorname{Ker} u^*u = \operatorname{Ker} u$ et donc $\operatorname{rg} u^*u = \operatorname{rg} u$.

4) Image de uu^* : on peut appliquer ce qui précède à uu^* au remplacement prés de u par u^*. Donc $\operatorname{Ker} uu^* = \operatorname{Ker} u^*$ et $\operatorname{rg} uu^* = \operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u$. Or $\operatorname{Im} uu^* \subset \operatorname{Im} u$ et leur dimension est la même d'où l'égalité.

□

Proposition 42. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Soit $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que h^2 soit une homothétie : $h^2 = \lambda \mathrm{Id}$. Alors $\lambda \geq 0$ et h est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$.*

Démonstration. $h^2 = h^*h \in \mathcal{S}^+(E)$ donc $\lambda \geq 0$ puisque c'est une valeur propre de h^2. Si μ est une valeur propre de h, elle est positive et vérifie $\mu^2 = \lambda$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. h est diagonalisable puisqu'il est autoadjoint et ne possède que la valeur propre $\sqrt{\lambda}$, c'est donc $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$. □

Théorème 11. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Il existe un et un seul $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = u$. On l'appelle* **la racine carrée de** *u et on le note $\sqrt{u}$.*

Démonstration. -

1) Existence : on diagonalise u dans une base orthonormée de vecteurs propres (e). Il vient :

$$\mathrm{Mat}(u, e) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

avec les $\lambda_i \geq 0$. L'endomorphisme h dont la matrice, par rapport à (e) est :

$$\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

est symétrique puisque sa matrice realtivement à la base orthonormale (e) l'est. Il est positif puisque son spectre l'est. Il vérifie bien $h^2 = u$.

2) Unicité : soit $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$. Soit λ une valeur propre de u. v commute avec $v^2 = u$ donc stabilise le sous espace propre de u associé à λ : $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$. L'endomorphisme $\tilde{v}$ induit par v sur E_λ est symétrique, positif et vérifie $\tilde{v}^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda}$ donc $\tilde{v} = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{E_\lambda}$ d'aprés la proposition précédente. Les restrictions de v et h aux sous espaces propres de u, dont E est somme directe, coïncident donc $v = h$.

□

Remarque 11. Si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^*h = hh^* = u$. D'où la réciproque de la proposition 41.

Exercice 33. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, montrer que, si $k \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^k = u$ et un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Exercice 34. Retrouver les résultats de l'exercice 28 en introduisant la racine carrée de A.

4.3 Matrices de Gramm

Définition 19. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel. On appelle **matrice de Gramm asssociée à un système** $(u_1, \ldots, u_n)$ **de vecteurs de** E la matrice symétrique réelle :

$$\boxed{G(u_1, \ldots, u_n) = [(u_i|u_j)]}$$

Le déterminant de cette matrice est appelé **déterminant de Gramm du système** $(u_1, \ldots, u_n)$.

Proposition 43. *Avec les notations précédentes, soit G l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à $G(u_1, \ldots, u_n)$. Le noyau de G est le noyau de l'application linéaire f de $\mathbf{R}^n$ dans E définie par :*

$$\boxed{(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j\, u_j}$$

Comme $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ *on en déduit :*

$$\boxed{\mathrm{rg}\, G(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n)}$$

Proposition 44. *On garde les mêmes hypothèses et notations et on identifie les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ aux matrices unicolonnes canoniquement associées. Si l'on note $(\ ,\ )$ le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$, il vient alors pour tout vecteur $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$:*

$$\boxed{{}^tX\, G(u_1, \ldots, u_n)\, X = (X, GX) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i \right\|^2 \geq 0}$$

Donc $G(u_1, \ldots, u_n)$ est une matrice positive ; elle est définie positive si et seulement si le système $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre dans E. En particulier un déterminant de Gramm est toujours positif.

Exemple 22. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. A est la matrice de Gramm de n vecteurs de E si et seulement si elle est positive.

Exercice 35. Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et $A \in \mathcal{S}_p(\mathbf{R})$. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit la matrice de Gramm d'un système de p vecteurs de E.

Exercice 36 (Calculs en base non orthonormée). Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n muni d'une base (e) non orthonormée, x et y deux vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Exprimer, en fonction de $X = \mathrm{Mat}(x, (e))$, $Y = \mathrm{Mat}(y, (e))$, $A = \mathrm{Mat}(u, (e)$:

- Le produit scalaire $(x|y)$.
- La matrice de u^* dans (e).

Application. Écrire une fonction Maple qui prend en argument un endomrphisme f de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et l'entier n et qui retourne la matrice de f^* dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$. Démontrer que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_4[X], \int_0^1 P'(x)^2 \, \mathrm{d}x \leq \left(96 + 2\sqrt{1605}\right) \int_0^1 P(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

et que cette inégalité est la meilleure possible.

Proposition 45. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel. On se donne un système libre $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E. Si $x \in E$, la distance d de x au sous espace $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est donnée par :*

$$\boxed{d^2 = \frac{\det G(u_1, \dots, u_n, x)}{\det G(u_1, \dots, u_n)}}$$

Exemple 23. Soit E l'espace préhilbertien réel des fonctions continues et de carré intégrable sur $]0, 1]$. Calculer la distance de la fonction ln sur le sous espace F de E engendré par $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.
Traitons cet exemple avec Maple.

```
u[1]:=1;u[2]:=x;u[3]:=x^2;u[4]:=ln(x);
S:=(f,g)->int(f*g,x=0..1);
f:=(i,j)->S(u[i],u[j]);
G:=matrix(4,4,f);
G1:=matrix(3,3,f);
```

Les matrices G et $G1$ valent respectivement :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & -1 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & -1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & -1/9 \\ -1 & -1/4 & -1/9 & 2 \end{bmatrix} \qquad G1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

La distance cherchée est donc donnée par la formule ci-dessus :

```
d:=sqrt(det(G)/det(G1));
```

Que Maple calcule :

$$d = \frac{1}{3}$$

Exercice 37. En raisonnant par récurrence et en utilisant la formule de la proposition 45, prouver que, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$:

$$0 < \det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Quel lien cette relation a-t-elle avec l'inégalité de Hadamard ? Étudier les cas d'égalité.

4.4 Décompositions matricielles classiques

4.4.1 Décomposition $Q\,R$

4.4.2 Décomposition ${}^tT\,T$

4.4.3 Décomposition polaire : $O\,S$