Calcul d'intégrales

PC*2

20 octobre 2002

Table des matières

Première partie
Les divers types d'intégrale

Comme d'habitude, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

1.1 Primitives

Rappel 1. *Étant donné une application f* **continue** *d'un intervalle I dans* $\mathbf{K}$ *et a un point de I, f admet une seule primitive sur I telle que $f(a) = 0$. Elle est donnée par :*

$$\boxed{x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$$

l'ensemble des primitives de f sur I est donné par :

$$\boxed{x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C \qquad C \in \mathbf{K}}$$

Cet ensemble est usuellement désigné par la notation :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 1. On a coutume d'utiliser encore cette notation lorsque le domaine d'intégration est une réunion d'intervalles. **Il faut bien comprendre ce qu'elle signifie**. par exemple l'écriture :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \quad C \in \mathbf{K}$$

Est une manière condensée d'écrire les deux choses suivantes :

Les primitives de la fonction continue $f_1 : x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \ln x + C_1$$

– Les primitives de la fonction continue $f_2 : x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \ln(-x) + C_2$$

Aucun lien n'existe entre les constantes C_1 et C_2. Il faut donc avoir à l'esprit qu'une même formule peut représenter des calculs sur plusieurs intervalles différents et toujours préciser ces intervalles.
De même l'écriture :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Signifie que, pour $k \in \mathbf{Z}$, les primitives de l'application continue f_k, définie sur l'intervalle $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ par $f_k(x) = 1/\sin x$, sont données par :

$$\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C_k$$

Les constantes C_k n'ont aucun rapport entre elles.

1.2 Tableau des primitives usuelles

Dans ce tableau les paramètres $\alpha \neq -1$, $a \neq 0$, $h \neq 0$ sont réels. La constante $C \in \mathbf{K}$ si l'on recherche les primitives à valeurs dans $\mathbf{K}$.

$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$	$=$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x$	$=$	$-\cos x + C$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\sin x + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$	$=$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$	$=$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$	$=$	$-\operatorname{cotg} x + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x}$	$=$	$-\frac{1}{\operatorname{th} x} + C$
$\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\operatorname{sh} x + C$	$\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x}$	$=$	$\operatorname{th} x + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	$=$	$\tan x + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$	$=$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$	$=$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+h}}$	$=$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+h}\right\rvert + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$=$	$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right) + C$

Les formules se vérifient par dérivation des second membres sur les intervalles, que les lecteurs daîgneront préciser, où ceux ci sont $\mathcal{C}^1$. Citons enfin trois primitives à connaître, qui comportent des paramètres complexes et qui s'obtiennent de la même manière
$\lambda \in \mathbf{C}^*$,$\alpha \in \mathbf{C} - \{-1\}$, $a, b \in \mathbf{R}$ et $b \neq 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} \int e^{\lambda x}\,dx &= \tfrac{e^{\lambda x}}{\lambda} + C \\ \int x^\alpha\,dx &= \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \\ \int \tfrac{dx}{x-a-ib} &= \tfrac{1}{2}\ln[(x-a)^2+b^2)] + i\arctan\left(\tfrac{x-a}{b}\right) + C \end{aligned}}$$

On reviendra plus loin sur cette dernière primitive.

Remarque 2 *(Homogénéité).* Pour retrouver rapidement des résultats tels que :

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

On peut faire un **raisonnement par homogénéité** : on affecte à la variable x et à la constante a une dimension (au sens de la physique) [L] (une longueur par exemple), le résultat a pour dimension $[L^{-1}]$ d'où la présence de la constante $1/a$ devant l'arc tangente et de la quantité sans dimension x/a à l'intérieur.

Remarque 3. On rappelle que les fonctions Argch, Argsh, Argth ne sont plus au programme, en particulier la formule :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

est valable sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$.
Même remarque pour la formule :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+h}\right| + C$$

Avec $h \in \mathbf{R}^*$ qui se vérifie par dérivation du second membre et qui est valable sur tout intervalle où l'intégrande est continu.
Pour $h > 0$, $x + \sqrt{x^2+h} > 0$, ce qui permet d'ôter la valeur absolue.

2 Intégrales définies

2.1 Cas d'une fonction continue sur un segment

Rappel 2. *Si f est une fonction* **continue sur un segment** $[a, b]$ *dont F est une primitive, il vient :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

Exemple 1. Pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Il faut d'abord déterminer de quel type d'intégrale il s'agit. La fonction f_n, définie sur $]0, \pi/2]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$$

Se prolonge par continuité au segment $[0, \pi/2]$ en posant $f_n(0) = 2n+1$. L'intégrale proposée est donc définie : c'est celle d'une fonction continue sur $[0, \pi/2]$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$$

D'autre part :

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x$$

Donc, pour $0 < x \leq \pi/2$ et $n \geq 1$:

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = 2\cos(2nx)$$

Relation qui s'étend au segment $[0, \pi/2]$ par continuité des deux membres. On en déduit, pour $n \geq 1$:

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nx)\,dx = \frac{1}{n}[\sin(2nx)]_{x=0}^{x=\pi/2} = 0$$

Donc $I_n = I_0 = \pi/2$. □

2.2 Cas d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Rappel 3. *Pour calculer l'intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, on détermine une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, de $[a, b]$ adaptée à la fonction f et on introduit, pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, la fonction $f_i \in \mathcal{C}([x_{i-1}, x_i], \mathbf{K})$ telle que :*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \ f_i(x) = f(x)$$

Il vient alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x}$$

L'intégrale $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x$ est celle d'une fonction **continue sur un segment***, on est donc ramené au cas précédent.*

Exemple 2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, démontrons la formule :

$$\int_{1/n}^{1} x \ln\left(\left[\frac{1}{x}\right]\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k+1)\ln k}{[k(k+1)]^2}$$

Où $[x]$ est la partie entière du réel x.

Démonstration. Soit f la fonction définie sur le segment $J = [1/n, 1]$ par :

$$f(x) = x \ln\left(\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

Pour prouver qu'elle est continue par morceaux sur ce segment, on introduit la subdivision :

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right)$$

de J. Pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on pose :

$$f_k(x) = x \ln k \quad \text{pour} \ \ 1/(k+1) \le x \le 1/k$$

f_k est bien **continue sur le segment** $[1/(k+1), 1/k]$ et :

$$\forall x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[, \ f(x) = f_k(x)$$

La fonction f est donc bien continue par morceaux sur le segment $[1/n, 1]$ et :

$$\int_{1/n}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} x \ln k\,\mathrm{d}x$$

d'où la formule proposée. □

3 Intégrale sur un intervalle quelconque

Rappel 4. *Pour calculer une intégrale sur un intervalle qui n'est pas un segment, on étudie d'abord l'intégrabilité de l'intégrande. On calcule ensuite l'intégrale sur un segment dont on fait enfin tendre les extrémités vers celles de l'intervalle d'intégration.*

Exemple 3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 2}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

Démonstration. On détermine d'abord le type d'intégrale dont il s'agit. La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 2}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$$

est continue sur cet intervalle.

1) Intégrabilité Lorsque $x \to +\infty$:

$$|f(x)| \sim \mathrm{e}^{-x} \quad \text{fonction positive intégrable sur } [0, +\infty[$$

Donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'aprés le critère d'intégrabilité par équivalence des fonctions de signe constant.

2) Calcul Soit $X > 0$, on calcule $\int_0^X f(x)\,\mathrm{d}x$. On fait le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$. L'application $x \mapsto t = \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, X]$:

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t-2}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\int_0^X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}^X} \frac{t-2}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t$$

On aura donc intérêt à poser $e^X = T$. On calcule, sur $[1, +\infty[$:

$$\int \frac{t-2}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t = -2\ln t + \ln(t^2+1) + \arctan t + C$$

(vu en HX, sinon voir plus loin). Donc :

$$\int_1^T \frac{t-2}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{T^2+1}{T^2}\right) + \arctan T - \ln 2 - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

□

Exemple 4.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \pi$$

Démonstration. La fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$$

est continue et positive sur cet intervalle.

1) Intégrabilité sur $]1, 2]$ Quand $x \to 1$:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{fonction positive et intégrable sur }]1,2]$$

Donc f est intégrable sur $]1, 2]$ d'aprés le critère d'intégrabilité par équivalence des fonctions de signe constant.

2) Intégrabilité sur $[2, +\infty[$ quand $x \to +\infty$:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{fonction positive et intégrable sur } [2,+\infty[$$

Donc f est intégrable sur $[2, +\infty[$ d'aprés le critère d'intégrabilité par équivalence des fonctions de signe constant.

3) Calcul Soient h et X tels que $1 < 1+h < X$. On calcule $\int_{1+h}^X f(x)\,\mathrm{d}x$ *via* le changement de variable $\sqrt{x-1} = t$. L'application $x \mapsto t = \sqrt{x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le **segment** $[1+h, X]$:

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2t\mathrm{d}t}{t(t^2+1)} = \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$\int_{1+h}^X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{h}}^{\sqrt{X-1}} \frac{2\mathrm{d}t}{(t^2+1)}$$

et donc :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}\lim_{h\to 0}\int_{1+h}^X f(x)\,\mathrm{d}x = \pi$$

□

Exemple 5.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$$

Où γ est la constante d'Euler.

Démonstration. La fonction f, définie sur $I =]0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

Est continue par morceaux sur cet intervalle car, si $J \subset I$ est un segment, il existe un entier $n > 0$ tel que $J \subset [1/n, 1] = J_n$. La subdivision de J_n définie par :

$$s_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right)$$

est adaptée à f donc $f_{|J_n}$ est bien continue par morceaux sur J_n.

1) Intégrabilité Pour $x \in I$, il vient :

$$0 \le f(x) \le 1$$

Comme $x \mapsto 1$ est intégrable sur I, f est intégrable d'aprés le critère d'intégrabilité par domination des fonctions positives.

2) Calcul On sait que, puisque f est intégrable sur I :

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_{J_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k}\left(\frac{1}{x} - k\right)\,\mathrm{d}x = \int_{1/n}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \gamma$$

□

Deuxième partie
Les méthodes générales d'intégration

4 Linéarité et linéarisation

On se limite à quelques exemples. Pour les deux premiers on pourra consulter la partie IV sur les intégrales trigonométriques.

Exemple 6. Calculer

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x$$

Exemple 7.

$$\int \operatorname{sh}^4 x \, \mathrm{d}x$$

Exemple 8. Calculer

$$\int (x^2 + x + 1) \cos(ax) \, \mathrm{d}x$$

Exemple 9. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}}$$

5 Changement de variable

Le seul théorème officiellement au programme est le suivant :

Théorème 1 (du changement de variable). *Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$ et $\phi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbf{R})$ telle que $\phi(J) \subset I$. Si α et β appartiennent à J, on a en posant $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$:*

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f\left[\phi(t)\right] \phi'(t) \mathrm{d}t = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x}$$

20 octobre 2002

Démonstration. Les fonctions F et G définies sur J par :

$$F(s) = \int_\alpha^s f\left[\phi(t)\right] \phi'(t) \mathrm{d}t$$

$$G(s) = \int_a^{\phi(s)} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifient :

$$F'(s) = G'(s) = f\left[\phi(s)\right] \phi'(s) \quad \text{et} \quad F(\alpha) = G(\alpha) = 0$$

Donc $F = G$ et le résultat. □

Remarque 4. -

ϕ N'A NUL BESOIN D'ÊTRE BIJECTIVE. LE BON SENS EST LE SEUL GUIDE DE CE QUI SUIT.

5.1 Exemples d'applications

5.1.1 Primitives

Soit à calculer par un changement de variable

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x$$

où $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$.

Proposition 1 (Changement de variable $x = \phi(t)$). *Soit ϕ une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle J dans $\mathbf{R}$ telle que $\phi(J) \subset I$. Si F est une primitive quelconque de f sur I, il vient, pour $t \in J$:*

$$\boxed{\int f\left[\phi(t)\right] \phi'(t) \mathrm{d}t = F\left[\phi(t)\right] + C}$$

Le calcul de la primitive de gauche permet le calcul de F sur l'intervalle $\phi(J) \subset I$.

Exemple 10. Calculer :

$$\int \sqrt{|x^2 - 1|} \, \mathrm{d}x$$

Démonstration. L'application $f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$ est continue sur $\mathbf{R}$. On se propose d'en calculer les primitives sur cet intervalle. On remarque d'abord que f admet une primitive impaire qu'on notera F :

$$x \mapsto \int_0^x \sqrt{|s^2 - 1|}\,\mathrm{d}s$$

Il suffit de calculer F sur $[0, +\infty[$.

1) Calcul sur $[0, 1]$ On pose $x = \sin t$. L'application $\phi : t \mapsto \sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [0, \pi/2]$ et $\phi(J) = [0, 1]$. Il vient donc, pour $t \in J$:

$$F(\sin t) = G(t) = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right] + C_1$$

Donc, puisque F est impaire, $F(0) = 0$, il vient pour $x \in [0, 1]$:

$$F(x) = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{2}$$

Car $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc, si $x = \sin t$ alors $t = \arcsin x$.

2) Calcul sur $[1, +\infty[$ on pose $x = \operatorname{ch} t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$:

$$F(\operatorname{ch} t) = G(t) = \int \operatorname{sh}^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2t - 1)\,\mathrm{d}t$$

$$G(t) = \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} - \frac{t}{2} + C_2$$

D'où, pour $x \geq 1$:

$$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{2} + C_2$$

En comparant les deux expressions ci-dessus pour $x = 1$, il vient :

$$C_2 = \frac{\pi}{4}$$

En conclusion, vu l'imparité de F, il vient :

$$\int_0^x \sqrt{|s^2 - 1|}\,\mathrm{d}s =$$

$$\begin{cases} 1/2\,\left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right) & \text{pour } -1 \leq x \leq 1 \\ 1/2\,\left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right) + \epsilon(x)\pi/4 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

où $\epsilon(x)$ est le signe de x.

$$\int \sqrt{|x^2 - 1|}\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

□

Proposition 2 (Changement de variable $t = \psi(x)$). *ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On essaie essaie de mettre la forme différentielle $f(x)\,\mathrm{d}x$ sous la forme $g[\psi(x)]\,\psi'(x)\,\mathrm{d}x$. Le calcul de :*

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

se ramène alors au calcul, sur $J = \psi(I)$, de :

$$G(t) = \int g(t)\mathrm{d}t$$

via la relation :

$$\boxed{F(x) = G[\psi(x)] + C}$$

Exemple 11. Calculer

$$\int \sin^5 x\ \mathrm{d}x$$

Démonstration. L'intégration a lieu sur $\mathbf{R}$ où l'intégrande est continu :

$$\sin^5 x\ \mathrm{d}x = -\sin^4 x\,\mathrm{d}(\cos x) = -\left(1 - \cos^2 x\right)^2 \mathrm{d}(\cos x)$$

Donc, en posant $t = \cos x$, le calcul proposé se ramène au calcul de :

$$G(t) = -\int \left(1 - t^2\right)^2 \mathrm{d}t = -1/5\,t^5 + 2/3\,t^3 - t + C$$

$$\int \sin^5 x\ \mathrm{d}x = G(\cos x) = -1/5\cos x^5 + 2/3\cos x^3 - \cos x + C$$

□

Remarque 5. Le paramètre formel t qui intervient dans $G(t)$ n'a provisoirement plus aucun rapport avec x. C'est une « variable indépendante », c'est pourquoi on dit que le calcul de l'intégrale initiale *se ramène* à celui de G.

Exemple 12 (Exemple de recollement). Calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$$

à l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Démonstration. Il faut d'abord observer que le changement de variable $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est défini et $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles :

$$I_k =]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[, \quad k \in \mathbf{Z}$$

L'intégration doit donc être conduite séparément sur chacun de ces intervalles.

En utilisant les symétries de l'intégrande il est possible de ne calculer ces primitives que sur l'intervalle I_0. Posons :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{2+\sin s}$$

F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$:

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} \frac{\mathrm{d}s}{2+\sin s} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}s}{2+\sin s}$$

Car l'intégrale d'une fonction continue par morceaux périodique, prise sur un intervalle de période ne dépend pas d'icelui. On va donc calculer F sur $]-\pi,\pi]$.

1) Calcul de F sur $]-\pi,\pi]$ L'application :

$$x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$. **On travaille sur les formes différentielles à l'exclusion de tout calcul d'intégrale** :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

Le calcul de

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$$

Sur $]-\pi,\pi[$ se ramène à celui de :

$$G(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1/2)^2 + 3/4}$$

sur $\mathbf{R}$. On trouve :

$$G(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$

Et donc, sur $]-\pi,\pi[$:

$$F(x) = G\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$

Comme $F(0) = 0$, il vient :

$$C_1 = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Ce qui est sans grand intérêt. Comme F est continue en π, il vient :

$$F(\pi) = \lim_{x\to\pi_-} F(x) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

2) Calcul de F sur $]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]$ Il vient maintenant :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}s}{2+\sin s} = \lim_{x\to\pi_-} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{2+\sin s} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

D'où, finalement, pour $x \in I_k$:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 2k\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

et :

$$F(\pi + 2k\pi) = F(\pi) + 2k\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + 2k\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x} = F(x) + C$$

□

5.2 Intégrales avec bornes

On a déja vu des exemples. En voici un autre.

Exemple 13. Calculer :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

Démonstration. La fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

est continue sur ce segment. Comme la période de f est $\pi/2$, on essaie le changement de variable : $t = \tan(2x)$, malheureusement il n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$. **L'idée consiste, ici encore à utiliser les symétries de la fonction à savoir :**

$$f(x + \pi/2) = f(x) \qquad f(-x) = f(x)$$

D'où :

$$I = 8\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

On intègre d'abord sur le segment $[0, \pi/4 - h]$ car le changement de variable :

$$x \mapsto \tan(2x)$$

n'est pas définie et $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi/4]$.

$$J(h) = \int_0^{\pi/4 - h} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

On travaille sur les formes différentielles :

$$t = \tan(2x) \quad \mathrm{d}t = 2(1 + t^2)\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2(1 + t^2)}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}\left[1 + \cos^2(2x)\right]$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\mathrm{d}t}{2 + t^2}$$

Donc :

$$J(h) = \int_0^{1/\tan(2h)} \frac{\mathrm{d}t}{2 + t^2} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

D'où :

$$I = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}$$

□

6 Intégration par parties

On rappelle qu'on peut intégrer par parties des applications $\mathcal{C}^1$ *(à la rigueur continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux)* sur un **segment.**

Exemple 14. Calculer :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1 - x}}\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. La fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1 - x}}$$

est continue sur cet intervalle.

1) Intégrabilité -

i) Sur $]0,1/2]$ Quand $x \to 0$:

$$|f(x)| \sim |\ln x| = o\left(x^{-1/2}\right)$$

D'où l'intégrabilité de f sur $]0,1/2]$ d'aprés les théorèmes d'intégrabilité par comparaison pour les fonctions positives.

ii) Sur $[1/2,1[$ quand $h \to 0$ par valeurs positives :

$$f(1-h) \sim -h^{2/3} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Donc f se prolonge continûment au segment $[1/2,1]$, elle est donc intégrable sur $[1/2,1[$.

2) Calcul On souhaite procéder par parties sur un segment, il est donc nécessaire de considérer, pour $0 < h, h' < 1/2$:

$$\int_h^{1-h'} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1-x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$-3/2 \int_h^{1-h'} \ln x\,\mathrm{d}(1-x)^{2/3}$$

Les fonctions :

$$x \mapsto \ln x \quad \text{et} \quad x \mapsto (1-x)^{2/3}$$

sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[h, 1-h']$, on peut donc écrire :

$$\int_h^{1-h'} \ln x\,\mathrm{d}(1-x)^{2/3} = \left[(1-x)^{2/3}\ln x\right]_h^{1-h'} - \int_h^{1-h'} \frac{(1-x)^{2/3}}{x}\,\mathrm{d}x$$

On observe que la partie toute intégrée tend vers $+\infty$ quand $h \to 0$, c'est qu'elle se compense avec l'intégrale. Cependant, on peut faire tendre h' vers 0 dans cette formule puisque tous ses termes ont des limites. Il vient :

$$\int_h^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1-x}}\,\mathrm{d}x = 3/2\left[(1-h)^{2/3}\ln h\right] + 3/2\int_h^1 \frac{(1-x)^{2/3}}{x}\,\mathrm{d}x$$

On effectue dans la deuxième intégrale le changement de variable :

$$t = \sqrt[3]{1-x} \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur le segment } [h,1]$$

$$\int_h^1 \frac{(1-x)^{2/3}}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_0^{(1-h)^{1/3}} \frac{t^4}{1-t^3}\mathrm{d}t$$

On calcule alors, sur $[0,1[$, les primitives :

$$\int \frac{t^4}{1-t^3}\mathrm{d}t =$$

$$-1/2\,t^2 - 1/3\,\ln(1-t) + 1/6\,\ln(t^2+t+1) - 1/3\,\sqrt{3}\arctan(1/3\,(2\,t+1)\,\sqrt{3}) + C$$

D'où :

$$\int_h^1 \frac{(1-x)^{2/3}}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$-3/2\,(1-h)^{2/3} - \ln(1-\sqrt[3]{1-h}) + 1/2\,\ln((1-h)^{2/3} +$$

$$\sqrt[3]{1-h} + 1) - \sqrt{3}\arctan(1/3\,\sqrt{3}\left(2\,\sqrt[3]{1-h}+1\right)) + 1/6\,\sqrt{3}\pi$$

On regroupe alors les termes qui vont se compenser :

$$z = 3/2\left[(1-h)^{2/3}\ln(h) - \ln(1-\sqrt[3]{1-h})\right]$$

quand $h \to 0$:

$$(1-h)^{2/3}\ln h = \ln h + o(1)$$

$$1 - \sqrt[3]{1-h} = h/3(1+o(1))$$

$$\ln(1-\sqrt[3]{1-h}) = \ln h - \ln 3 + o(1)$$

$$\lim_{h\to 0} z = 3/2\ln 3$$

D'où :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1-x}}\,\mathrm{d}x = -9/4 - 1/4\,\pi\,\sqrt{3} + 9/4\,\ln(3)$$

□

Troisième partie
Intégration des fractions rationnelles

7 Primitives des fractions rationnelles

7.1 Méthode générale

Proposition 3. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe :*

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x - z}$$

Alors :

- *Si $b = 0$:*

$$\boxed{F(x) = \ln|x - a| + C}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$. C est une constante réelle ou complexe suivant qu'on veut les primitives à valeurs réelles ou complexes.

- *Si $b \neq 0$:*

$$\boxed{F(x) = \ln|x - z| + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\ln[(x-a)^2 + b^2)] + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C}$$

sur $\mathbf{R}$ C est une constante complexe.

Démonstration. On vérifie ces relations en dérivant le second membre □

Proposition 4. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, $n \geq 2$ un entier naturel :*

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x - z)^n}$$

Alors :

- *Si $b = 0$:*

$$\boxed{F(x) = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$. C est une constante réelle ou complexe suivant qu'on veut les primitives à valeurs réelles ou complexes.

- *Si $b \neq 0$:*

$$\boxed{F(x) = \frac{(x-z)^{1-n}}{1-n} + C}$$

sur $\mathbf{R}$ C est une constante complexe.

Pour trouver les primitives d'une fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \text{ où } A, B \in \mathbf{C}[X]$$

Sur chaque intervalle I ne contenant aucun zéro de B, on décompose F en éléments simples sur $\mathbf{C}$ et on intègre chaque élément simple sur les intervalles I.
Pour la décomposition générale en élément simple sur $\mathbf{C}$, se reporter à son cours de première année.
Cette technique est la meilleure dans le cas des fractions avec paramètres. dans le cas de fractions exclusivement numériques, on verra comment l'améliorer.

Exemple 15 (Facultatif pour les 3/2). Calcul de la somme de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

où z est un complexe de module < 1.
On a vu *cf polycopié "développement de fonctions en séries entières"* que cette somme vaut :

$$I = \int_0^1 \frac{z}{1 + tz}$$

Alors $1 + z \in \Delta = \mathbf{C} - \mathbf{R}_-$ et :

$$I = \ln(1 + z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(1 + z)$$

Où $\mathrm{Arg}(1+z)$ est celle des déterminations de l'argument de $1+z$ qui appartient à $]-\pi, \pi[$. On a vu que c'était ainsi qu'était défini $\ln(1 + z)$.

Démonstration. -

1) Considérations géométriques Soit $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ une forme trigonométrique de z avec :

$$0 \leq r < 1 \text{ et } \theta \in \mathbf{R}$$

$$\mathrm{Re}(1+z) = 1 + r\cos\theta > 0 \ \text{ donc } \ 1+z \in \Delta$$

Posons :

$$\tan\phi = \frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta} \text{ avec } -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$$

a priori ϕ n'à pas de raison d'être un argument de $1+z$ puisqu'un tel argument est déterminé modulo 2π *ie* à l'aide *des deux* lignes trigonométriques cos et sin alors que la tangente d'un angle ne le détermine que modulo π. En faisant un dessin (laissé aux lecteurs), on se rend pourtant compte que, puisque $\mathrm{Re}(1+z) > 0$, $1+z$ doit avoir l'un de ses arguments qui appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Prouvons donc que $\phi = \mathrm{Arg}(1+z)$.

$$1 + z = (1 + r\cos\theta)(1 + i\tan\phi) = \frac{1+r\cos\theta}{\cos\phi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})$$

Comme $1 + r\cos\theta > 0$ et $\cos\phi > 0$ vu que $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$\frac{1+r\cos\theta}{\cos\phi} = |1+z|$$

d'où ϕ est un argument de $1+z$ qui appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\phi = \mathrm{Arg}(1+z)$.

2) Calcul de I Pour $z \notin]-1, 1[$, $r\sin\theta \neq 0$, il vient :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\frac{1}{z}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t + \frac{\cos\theta}{r} - \mathrm{i}\,\frac{\sin\theta}{r}}$$

$$= \left[\ln\left|t+\frac{1}{z}\right| + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{t+\frac{\cos\theta}{r}}{\frac{\sin\theta}{r}}\right)\right]_0^1$$

Soit, en explicitant et en regroupant les deux logarithmes :

$$I = \ln|1+z| + \mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{r+\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \arctan\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right)$$

Notons ψ la différence de ces deux arcs tangentes. Comme :

$$\left(\frac{r+\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \neq -1$$

$\psi \neq \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ *(pourquoi ?)* Chaque arc-tangente étant aussi différent de ces valeurs, on peut appliquer la formule d'addition des tangentes au calcul de $\tan\psi$, lequel fournit :

$$\tan\psi = \left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right) = \tan\phi$$

Donc, il existe un $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\psi - \phi = k\pi$ En considérant ψ, ϕ et donc k comme des fonctions continues de θ sur l'intervalle $]0, \pi[$ *(resp* $]-\pi, 0[$*)*, k prenant des valeurs entières, elle est constante sur chacun de ces intervalles. En calculant ϕ et ψ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ *(resp)* $-\frac{\pi}{2}$, on trouve $k = 0$ d'où la formule attendue. Le cas où $z \in]-1, 1[$ est laissé à la sagacité des lecteurs.

□

Exemple 16. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$$

1) Intégrabilité Prouvons d'abord que $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^{2n}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Elle est continue sur cet intervalle, positive et :

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{2n}} \text{ quand } x \to +\infty$$

Comme $g(x) = \frac{1}{x^{2n}}$ est positive et intégrable sur $[1, +\infty[$, il en est de même de f.

La méthode consiste à calculer :

$$I_n(X) = \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$$

Puis à faire tendre X vers $+\infty$.

2) Calcul -

i) Décomposition de f sur C Les racines complexes de $P(X) = 1 + X^{2n}$ sont les :

$$\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k},\ k = 0, \dots, 2n-1$$

avec

$$\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

Ces racines sont simples, f n'a pas de partie entière donc :

$$f(X) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k}$$

Avec :

$$a_k = \frac{1}{P'(\omega_k)}$$

Formule du résidu vue en première année, n'est valable que pour un pôle simple Soit :

$$a_k = \frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}} = \frac{-\omega_k}{2n}$$

vu que $\omega_k^{2n} = -1$. D'où :

$$f(X) = \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

ii) Primitives de f Posons $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, il vient :

$$F(x) = \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \omega_k \left(\ln |x - \omega_k| + \mathrm{i} \arctan \left(\frac{x - \cos\theta_k}{\sin\theta_k} \right) \right) + C$$

Afin de mettre en évidence les primitives de f qui prennent des valeurs réelles, il est préférable de regrouper les pôles conjugués. On dessine les images des racines sur le cercle trigonométrique et on observe que, si $k + k' = 2n - 1$ alors

$$\theta_k + \theta_{k'} = 2\pi \text{ ie } \omega_{k'} = \bar{\omega}_k$$

Lorsque k décrit l'intervalle $[0, n-1]$, k' décrit l'intervalle $[n, 2n-1]$. D'où

$$\begin{aligned} \omega_k \ln |x - \omega_k| + \bar{\omega}_k \ln |x - \bar{\omega}_k| &= (\omega_k + \bar{\omega}_k) \ln |x - \omega_k| \\ &= 2\cos\theta_k \ln |x - \omega_k| \\ &= \cos\theta_k \ln(x^2 - 2x\cos\theta_k + 1) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \omega_k \arctan\left(\frac{x - \cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right) &- \bar{\omega}_k \arctan\left(\frac{x - \cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right) \\ &= 2\mathrm{i}\sin\theta_k \arctan\left(\frac{x - \cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right) \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$F(x) = \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\theta_k \ln(x^2 - 2x\cos\theta_k + 1) - 2\sin\theta_k \arctan\left(\frac{x - \cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right) + C$$

Où C est une constante réelle.

iii) Limite de $I_n(X)$ quand $X \to +\infty$

$$I_n(X) = F(X) - F(0)$$

On sait que l'intégrabilité de f assure l'existence d'une limite pour $I_n(X)$ quand $X \to +\infty$ laquelle est l'intégrale I_n cherchée. Il en résulte que le terme :

$$J(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\theta_k \ln(X^2 - 2X\cos\theta_k + 1)$$

admet une limite finie quand $X \to +\infty$. Mettons, dans chacun des arguments des logarithmes de cette somme, la partie principale X^2 en facteur :

$$J(X) = \left(2\sum_{k=0}^{n-1} \cos\theta_k\right) \ln(X) + u(X)$$

où
$$\lim_{X\to\infty} u(X) = 0$$
(Les lecteurs écriront la forme explicite de $u(X)$ pour s'en convaincre)
Pour que $J(X)$ ait une limite finie, il est donc nécessaire que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\theta_k = 0$$
Ce qu'on peut vérifier par un calcul direct. On regardera la figure formée par les images des racines pour voir qu'on aurait pu intuiter géométriquement ce résultat. Il en résulte, en faisant tendre X vers $+\infty$ dans l'expression de $I_n(X)$:
$$I_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \pi\sin\theta_k + 2\sin\theta_k \arctan\left(\frac{\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right)$$
puisque tous les termes de la forme :
$$\arctan\left(\frac{X-\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right)$$
tendent vers $\dfrac{\pi}{2}$ vu que :
$$\frac{\pi}{2n} \le \theta_k \le \pi - \frac{\pi}{2n} \text{ pour } 0 \le k \le n-1$$

iv) Forme simplifiée de I_n On peut écrire I_n sous la forme :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\theta_k\left[\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right)\right]$$
Or $0<\theta_k<\pi$ donc $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-\theta_k<\dfrac{\pi}{2}$. et,
$$\operatorname{cotg}\theta_k = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_k\right) \text{ et } \arctan\left(\frac{\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right) = \frac{\pi}{2}-\theta_k$$
D'où :
$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\pi-\theta_k)\sin\theta_k \tag{1}$$

On remarque ensuite, toujours en regardant les symétries de la figure, que :
$$\theta_{n-1-k} = \pi - \theta k$$
D'où, en changeant k en $n-1-k$ dans la dernière expression de I_n :
$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\theta_k\sin\theta_k \tag{2}$$
En ajoutant (1) et (2) :
$$I_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\theta_k$$
La somme de sinus d'arcs en progression arithmétique se calcule habituellement comme la partie imaginaire de :
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\theta_k} = e^{\frac{i\pi}{2n}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k i\pi}{n}}$$
Somme qui vaut :
$$\frac{-2\,e^{\frac{i\pi}{2n}}}{e^{\frac{i\pi}{n}}-1}$$
D'où
$$I_n = \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 1. Vérifier la cohérence de ce résultat en étudiant directement la limite de I_n quand $n\to\infty$.

7.2 Quelques techniques simplificatrices dans le cas des fractions à coefficients réels

7.2.1 Décomposition en éléments simples relative à un pôle réel

Rappel 5. *Soit* $F(X) = \dfrac{A(X)}{(X-a)^\alpha B(X)}$ *et* $B(a)\neq 0$. *On suppose* $A, B \in \mathbf{R}[X]$ *et* $a\in\mathbf{R}$. *Écrivons la décomposition de* F *relative au pôle* a.
$$F(X) = \frac{a_\alpha}{(X-a)^\alpha} + \frac{a_{\alpha-1}}{(X-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(X-a)} + \frac{U(X)}{B(X)}$$

Où $U \in \mathbf{R}[X]$. Comme B est continue en a et que $B(a) \neq 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a-\delta, a+\delta[,\ B(x) \neq 0$$

Si $|h| < \delta$, il vient :

$$\boxed{F(a+h) \quad = \quad \frac{a_\alpha}{h^\alpha} + \frac{a_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \dots + \frac{a_1}{h} + G(h) \quad (3)}$$

avec $G(h) = \frac{U(a+h)}{B(a+h)}$ et donc G est continue en 0. Il en résulte que $G(h) = o\left(\frac{1}{h}\right)$ quand $h \to 0$ et que la relation (3) **est un développement asymptotique de F au voisinage de a à la précision $\frac{1}{h}$**

Exemple 17. Calcul de

$$F(x) = \int \frac{x+2}{x(x-1)^3(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose $f(x) = \dfrac{x+2}{x(x-1)^3(x+1)^2}$ *et on effectue l'intégration sur I où I est l'un des intervalles :*

$$]-\infty,-1[,\ ]-1,0[,\ ]0,1[,\ ]1,+\infty[$$

1) Décomposition relative au pôle 0

$$f(x) = \frac{-2}{x} + \dots$$

2) Décomposition relative au pôle 1

$$f(1+h) = \frac{3+h}{h^3(1+h)(2+h)^2} = \frac{g(h)}{h^3}$$

et $g(h) = (3+h)(1+h)^{-1}(2+h)^{-2}$. On développe g à l'ordre 2 au voisinage de 0 pour avoir f en $1/h$.

$$g(h) = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}h + \frac{25}{16}h^2 + o\left(h^2\right)$$

D'où :

$$f(-1+h) = \frac{3}{4h^3} - \frac{5}{4h^2} + \frac{25}{16h} + o\left(\frac{1}{h}\right)$$

La décomposition de f relative au pôle 1 est donc :

$$f(x) = \frac{3}{4(x-1)^3} - \frac{5}{4(x-1)^2} + \frac{25}{16(x-1)} + \dots$$

3) Décomposition relative au pôle -1 On trouve :

$$f(-1+h) = \frac{1}{8h^2} + \frac{7}{16h} + o\left(\frac{1}{h}\right)$$

D'où la décomposition relative au pôle -1 :

$$f(x) = \frac{1}{8(x+1)^2} + \frac{7}{16(x+1)} + \dots$$

4) Expression de F

$$-2\,\ln|x| - \frac{3}{8\,(x-1)^2} + \frac{5}{4\,x-4} + \frac{25\,\ln|x-1|}{16} - \frac{1}{8\,x+8} + \frac{7\,\ln|x+1|}{16} + C$$

Sur chacun des intervalles I spécifiés ci-dessus.

Exercice 2. Intégrer, sur $]1,+\infty[$, l'équation différentielle vérifiée par les polynômes de Legendre.

7.2.2 Utilisation d'une forme à priori dans le cas de pôles deux à deux conjugués

Dans les exemples précédents, on voit qu'il est préférable, lorsque la fraction est à coefficients réels, de regrouper les éléments simples relatifs aux pôles complexes conjugués. On va développer des méthodes plus rapides pour mettre les primitives des fractions rationnelles à coefficients réels sous forme exploitable en se limitant au cas où les pôles complexes ont une multiplicité au plus égale à deux.

Théorie Considérons une fraction rationnelle f *à coefficients réels* de la forme :

$$f(X) = \frac{A(X)}{(X-z)^2(X-\bar{z})^2 B(X)}$$

Où :

- A et B sont des polynômes *non nuls* à coefficients réels.
- z est un nombre complexe irréel :

$$z = a + \mathrm{i}b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbf{R},\ b \neq 0$$

- B n'admet pas la racine z *et donc non plus la racine* $\bar{z}$.

La décomposition de f en éléments simples sur $\mathbf{C}$ prend la forme :

$$f(X) = E(X) + \frac{\alpha}{(X-z)^2} + \frac{\bar{\alpha}}{(X-\bar{z})^2} + \frac{\beta}{X-z} + \frac{\bar{\beta}}{X-\bar{z}} + \frac{R(X)}{B(X)}$$

Avec :

- $E(X)$ est la partie entière éventuelle de f.
- $\frac{R}{B}$ est une fraction rationnelle à coefficients réels de degré strictement négatif ($\deg R < \deg B$) et n'admettant plus le pôle z.
- On posera dans la suite :

$$T(X) = (X-z)(X-\bar{z}) = (X-a)^2 + b^2 = X^2 - sX + p$$

avec :

$$z + \bar{z} = s, \qquad z\bar{z} = p$$

Il s'agit d'un trinôme sans racine réelle et donc tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ T(x) > 0$$

Ce qui autorisera, par la suite, à considérer :

$$\ln(T(x)) = \frac{1}{2}\ln|x-z|$$

puisque $|x-z| = |x-\bar{z}|$ pour tout réel x.

On va considérer :

$$\phi(X) = \frac{\alpha}{(X-z)^2} + \frac{\bar{\alpha}}{(X-\bar{z})^2} + \frac{\beta}{X-z} + \frac{\bar{\beta}}{X-\bar{z}}$$

La somme des parties polaires relatives aux pôles z et $\bar{z}$ et s'intéresser à **la forme** de :

$$\int \phi(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 5. *une primitive particulière $\Phi(x)$, de ϕ, est de la forme :*

$$\boxed{\lambda \ln(x^2 - sx + p) + \mu \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{Ax+b}{x^2+sx+p}}$$

Où λ, μ, A, B sont des réels, a et b ont été définis plus haut.

Démonstration. On calcule d'abord :

$$\int \left(\frac{\alpha}{(x-z)^2} + \frac{\bar{\alpha}}{(x-\bar{z})^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\alpha}{x-z} - \frac{\bar{\alpha}}{x-\bar{z}}$$

à une constante d'intégration près. On regroupe les deux termes conjugués du second membre :

$$-\frac{\alpha}{x-z} - \frac{\bar{\alpha}}{x-\bar{z}} = \frac{Ax+B}{x^2-sx+p}$$

avec :

$$A = -(\alpha + \bar{\alpha})$$
$$B = -(\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z)$$

qui sont bien réels puisqu'ils sont égaux à leurs conjugués.

Calculons ensuite :

$$\int \left(\frac{\beta}{x-z} + \frac{\bar{\beta}}{x-\bar{z}}\right)\mathrm{d}x$$

On a vu précédemment que :

$$\int \frac{\beta \mathrm{d}x}{x-z} = \beta\left[\ln|x-z| + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]$$

et :

$$\int \frac{\bar{\beta}\mathrm{d}x}{x-\bar{z}} = \bar{\beta}\left[\ln|x-\bar{z}| - \mathrm{i}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]$$

Toujours à une constante prés. On va regrouper les deux termes en logarithme et les deux termes en arc tangente.

Terme en logarithme On observe que :

$$\beta\ln|x-z| + \bar{\beta}\ln|x-\bar{z}| = (\beta+\bar{\beta})\ln|x-z|$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{(\beta+\bar\beta)}{2}\ln(x^2-sx+p)$$

car :

$$\ln|x-z| = \ln|x-\bar z| = \frac{1}{2}\ln|(x-z)(x-\bar z)|$$

En posant $\frac{(\beta+\bar\beta)}{2} = \lambda \in \mathbf{R}$, on a bien le terme voulu en logarithme.

Terme en arc tangente Il vaut :

$$\mathrm{i}(\beta-\bar\beta)\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

Or $\mu = \mathrm{i}(\beta-\bar\beta) \in \mathbf{R}$ car $\mu = \bar\mu$ d'où la forme annoncée.

□

Remarque 6. Si le pôle z est simple, un calcul analogue au précédent donne la même forme **sans le terme** $\frac{Ax+b}{x^2-sx+p}$.

Pratique

Factorisation de T sur R et C En pratique, T peut apparaitre sous plusieurs formes :

– Sous la forme $(X-z)(X-\bar z)$, si l'on a été amené à calculer les racines complexes du dénominateur de f afin de le factoriser. On aura intérêt à l'écrire sous la forme X^2-sX+p puisqu'il intervient ainsi dans le terme en logarithme. Si les racines z et $\bar z$ apparaissent sous forme trigonométrique :

$$z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{et} \quad \bar z = \rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

Il vient :

$$s = z+\bar z = 2\rho\cos\theta \quad \text{et} \quad p = z\bar z = \rho^2$$

D'où l'importante relation de Poisson : [1]

$$\boxed{(X-\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(X-\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = X^2-2\rho X\cos\theta+\rho^2}$$

[1] En fait elle ne s'appelle pas comme ça mais c'est pour frapper les esprits.

Exemple 18.

$$f(X) = \frac{2X+1}{(X^3+1)^2}$$

La décomposition sur **C** du dénominateur $D(X) = (X^3+1)^2$ est :

$$D(X) = (X+1)^2(X+j)^2(x+\bar j)^2$$

En regroupant les deux polynômes correspondant aux deux racines conjuguées de $D(X)$, on obtient la décomposition sur **R** de $D(X)$:

$$D(X) = (X+1)^2(X^2-X+1)^2$$

Au passage, on peut noter :

$$X^2-X+1 = X^2-2X\cos(\pi/3)+1$$

– T apparait souvent directement sous la forme X^2-sX+p. On a alors intérêt, plutôt que de se précipiter sur le discriminant, à mettre directement T sous forme canonique :

$$T(X) = (X-a)^2+b^2$$

en faisant apparaitre le début d'un carré, la factorisation de T sur **C** est alors immédiate et l'on a directement a et b qui interviennent dans le calcul du terme en arc tangente.

Exemple 19.

$$T(X) = X^2+X+2 = (X+1/2)^2+7/4 = (X+1/2)^2-(\mathrm{i}\sqrt7/2)^2$$

Différence de deux carrés qui s'écrit :

$$\left(X+\frac12+\mathrm{i}\frac{\sqrt7}{2}\right)\left(X+\frac12-\mathrm{i}\frac{\sqrt7}{2}\right)$$

D'où les deux racines z et $\bar z$, en choisissant, par exemple :

$$z = -\frac12+\mathrm{i}\frac{\sqrt7}{2}$$

Si l'on a à faire un calcul d'intégrale faisant intervenir T au dénominateur, les seules relations utiles seront les suivantes :

– $X^2+X+2 = (X+1/2)^2+7/4$ qui fournit $a=-1/2$ et $b=7/4$.
– $z+\bar z = -1$ et $z\bar z = 7/4$. Relation qui permet de travailler avec l'algèbre associée aux racines de T (voir le paragraphe suivant)

Algèbre associée aux racines d'un trinôme Considérons un trinôme T sans racine réelle :

$$T(X) = X^2 - sX + p = (X - z)(X - \bar{z})$$

Dans les calculs qui vont suivre, on aura besoin de considérer $\mathbf{C}$ comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni de la base $(1, z)$. Il importe donc de préciser comment on peut calculer dans cette base.

– $z^2 = sz - p$, ce qui permet, de proche en proche, d'exprimer z^n sous la forme $Az + B$.
  Exemple 20. $z^2 + z + 2 = 0$, calculons z^3, z^4 :

$$z^2 = -z - 2, \quad z^3 = -z^2 - 2z = (z + 2) - 2z = -z + 2$$

$$z^4 = (z + 2)^2 = z^2 + 4z + 4 = 3z + 2$$

– $\frac{1}{z}$ peut aussi se mettre sous la forme précédente :

$$z - s + \frac{p}{z} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{p}(-z + s)$$

  Exemple 21. $z^2 + z + 2 = 0$, calculons $1/z$, $1/z^2$:

$$z^2 + z + 2 = 0, \quad = z + 1 + \frac{2}{z} = 0, \quad \frac{1}{z} = -\frac{z + 1}{2}$$

  en élevant cette relation au carré, il vient :

$$\frac{1}{z^2} = \frac{(z + 1)^2}{4} = \frac{z^2 + 2z + 1}{4} = \frac{z - 1}{4}$$

– Signalons enfin comment on peut calculer des fractions rationnelles simples en z auxquelles on peut toujours se ramener via les calculs précédents :
  Exemple 22. $z^2 + z + 2 = 0$, calculons $u = \frac{z+1}{z-1}$. On multiplie haut et bas par $\bar{z} - 1$ de sorte que le dénominateur est :

$$(z - 1)(\bar{z} - 1)$$

  qui est une expression symétrique des racines de T et qui s'exprime donc uniquement en fonction de la somme et du produit des racines *via* la relation :

$$T(X) = X^2 + X + 2 = (X - z)(X - \bar{z})$$

d'où :

$$(z - 1)(\bar{z} - 1) = T(1) = 1 - s + p$$

dans l'exemple ci-dessus :

$$(z - 1)(\bar{z} - 1) = 4$$

Donc :

$$u = \frac{(z + 1)(\bar{z} - 1)}{4} = \frac{(z\bar{z} - z + \bar{z} - 1)}{4}$$

Or :

$$z\bar{z} = 2, \quad z + \bar{z} = -1, \quad ie \quad \bar{z} = -1 - z$$

D'où :

$$u = \frac{2 - z + (-1 - z) - 1}{4} = \frac{-z}{2}$$

Mise en œuvre On va mettre en œuvre ce qui précède sur des exemples.

Exemple 23. Calculer :

$$F(x) = \int \frac{(x - 1)\,\mathrm{d}x}{(x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

Posons :

$$f(x) = \frac{(x - 1)}{(x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

Comme

$$T(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \tag{4}$$

qui nous servira plus loin, la fonction f est continue sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]-1, +\infty[$. **On fait un seul calcul mais, en réalité l'intégration est conduite séparément sur chacun de ces intervalles.**

1) Intégration de la partie polaire relative au pôle -1 Comme on a vu précédemment, on détermine cette partie polaire grâce à un développement asymptotique de f au voisinage de -1 en $1/(x + 1)$. Il vient, lorsque h est au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} x &= -1 + h & (5) \\ x - 1 &= -2 + h & (6) \\ x^2 + 2x + 2 &= 1 + o(h) & (7) \end{aligned}$$

donc :
$$f(-1+h) = \frac{-2+h}{h^2(1+o(h))} = \frac{-2}{h^2} + \frac{1}{h} + o\left(\frac{1}{h}\right)$$
L'intégration de la partie polaire relative au pôle -1 donne un résultat du type :
$$F(x) = \frac{2}{x+1} + \ln|x+1| + \dots$$

2) Intégration des parties polaires relatives aux pôles complexes On reprend la relation (4) :
$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$
La forme de $F(x)$ est donc :
$$F(x) = \frac{2}{x+1} + \ln|x+1| + \mu \arctan(x+1) + \lambda \ln(x^2+2x+2) + C$$
Pour avoir μ et λ on dérive cette relation :
$$f(x) = \mu\frac{1}{1+(x+1)^2} + \lambda\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + g(x)$$
soit :
$$f(x) = \frac{2\lambda x + \mu + 2\lambda}{x^2+2x+2} + g(x) \tag{8}$$
où g est une fraction n'admettant pas pour pôle un zéro de x^2+2x+2. Notons ω et $\bar{\omega}$ les deux racines complexes de T. On multiplie alors la relation (8) par x^2+2x+2 et on substitue ω à x dans la relation obtenue soit :
$$\frac{\omega-1}{(\omega+1)^2} = 2\lambda\omega + \mu + 2\lambda$$
Or :
$$\omega^2 = -2\omega - 2$$
donc :
$$(\omega+1)^2 = -1$$
et
$$\frac{\omega-1}{(\omega+1)^2} = -\omega + 1$$

Comme $(1,\omega)$ est une base de **C** considéré comme **R**-espace vectoriel de dimension 2, il vient :
$$\begin{cases} 2\lambda = -1 & \text{donc } \lambda = -1/2 \\ \mu + 2\lambda = 1 & \text{donc } \mu = 2 \end{cases}$$
$$F(x) = \frac{2}{x+1} + \ln|x+1| + 2\arctan(x+1) + \frac{-1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C$$
On rappelle que la constante C n'est pas la même sur I_1 et I_2. Vérification sous MAPLE :

```
y:=(x-1)/((x+1)^2*(x^2+2*x+2));
```
$$\frac{x-1}{(x+1)^2\,(x^2+2\,x+2)}$$
```
int(y,x);
```
$$\frac{2}{x+1} + \ln(x+1) - \frac{\ln(x^2+2\,x+2)}{2} + 2\,\arctan(x+1)$$

Voyons maintenant un exemple utilisant la parité de la fonction à intégrer.

Exemple 24. Calculer :
$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^8+x^4+1}$$

1) Factorisation du dénominateur Cherchons ses racines complexes de $D(X) = X^8 + X^4 + 1$. Il faut résoudre l'équation :
$$z^8 + z^4 + 1 = 0 \tag{9}$$
Qui se ramène, via le changement de variable $z^4 = Z$ à :
$$z^4 = j \quad \text{ou} \quad z^4 = j^2 = \bar{j}$$
On n'étudie que la première puisque les solutions de la seconde en sont les conjuguées. Il vient :
$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/6 + 2k\mathrm{i}\,\pi/4} \qquad \text{avec} \;\; k = 0,1,2,3$$

Une fois qu'on a la racine $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/6} = \sqrt{3}/2 + \mathrm{i}/2$, les autres s'obtiennent par des rotations successives d'angle $\pi/2$ soit :

$$\{z, \mathrm{i}z, -z, -\mathrm{i}z\}$$

Que les lecteurs écriront sous forme algébrique $(a+\mathrm{i}b)$ et représenteront géométriquement. On peut cependant factoriser $D(X)$ rapidement sur $\mathbf{R}$ en remarquant la *relation fondamentale* :

$$(X - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})(X - r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}) = X^2 - 2rX\cos\theta + r^2$$

donc :

$$D(X) = \prod_{k=0}^{3}(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/6 + k\,\mathrm{i}\,\pi/2})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi/6 - k\,\mathrm{i}\,\pi/2})$$

$$D(X) = \prod_{k=0}^{3}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + 1\right)$$

Soit :

$$D(X) = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$$

Chaque trinôme est évidemment sans racine réelle, écrivons les sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
X^2 + \sqrt{3}X + 1 &= (X + \sqrt{3}/2)^2 + 1/4 \\
X^2 - \sqrt{3}X + 1 &= (X - \sqrt{3}/2)^2 + 1/4 \\
X^2 - X + 1 &= (X - 1/2)^2 + 3/4 \\
X^2 + X + 1 &= (X + 1/2)^2 + 3/4
\end{aligned}$$

2) Calcul de $F(x)$ elle a la forme :

$$F(x) = \lambda\ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1) + \lambda_1\ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) +$$

$$\lambda'\ln(x^2 - x + 1) + \lambda'_1\ln(x^2 + x + 1) +$$

$$\mu\arctan\left(2x - \sqrt{3}\right) + \mu 1\arctan\left(2x + \sqrt{3}\right) +$$

$$\mu'\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \mu'_1\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Or l'une des primitives de $f(x) = \frac{1}{D(x)}$ est impaire puisque f est paire. On en déduit :

$$\lambda_1 = -\lambda, \quad \lambda'_1 = -\lambda', \quad \mu_1 = \mu, \quad \mu'_1 = \mu_1$$

Il reste donc à calculer $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$.

3) Détermination de λ et μ On dérive l'expression précédente de $F(x)$:

$$f(x) = \lambda\frac{2x - \sqrt{3}}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \frac{\mu}{2(x^2 - x\sqrt{3} + 1)} + g(x)$$

où g est une fraction rationnelle qui n'admet pas pour pôle un zéro de $x^2 - x\sqrt{3} + 1$. Soit $\omega \in \mathbf{C}$ une racine de ce trinôme, on multiplie cette expression de $f(x)$ par $x^2 - x\sqrt{3} + 1$ et on substitue ω à x :

$$\lambda(2\omega - \sqrt{3}) + \frac{\mu}{2} = \frac{1}{(\omega^2 + \sqrt{3}\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)}$$

En utilisant plusieurs fois la relation :

$$\omega^2 = \omega\sqrt{3} - 1$$

il vient :

$$(\omega^2 + \sqrt{3}\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 4\omega^3\sqrt{3}$$

D'où :

$$2\lambda\omega + \left(\frac{\mu}{2} - \lambda\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4\omega^3\sqrt{3}}$$

On pourrait, de proche en proche, d'exprimer les puissances successives de ω, donc ω^3, dans la base $(1, \omega)$; mais on peut directement travailler avec les puissances de $1/\omega$. En effet :

$$\omega^2 - \omega\sqrt{3} + 1 = 0$$

donc, en divisant cette relation par ω :

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{3} - \omega \tag{10}$$

On élève (10) au carré et on réutilise $\omega^2 = \sqrt{3}\omega - 1$:

$$\frac{1}{\omega^2} = -\omega\sqrt{3} + 2 \tag{11}$$

On multiplie (11) par $1/\omega$ et on réutilise (10) :

$$\frac{1}{\omega^3} = -2\omega + \sqrt{3}$$

D'où :

$$2\lambda\omega + \left(\frac{\mu}{2} - \lambda\sqrt{3}\right) = \frac{-\omega}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4}$$

Comme $(1, \omega)$ est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$:

$$\begin{cases} 2\lambda = \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \text{d'où } \lambda = \frac{-1}{4\sqrt{3}} \\ \frac{\mu}{2} - \lambda\sqrt{3} = \frac{1}{4} & \text{d'où } \mu = 0 \end{cases}$$

4) Détermination de λ' et μ' Même méthode avec le trinôme $x^2 - x + 1$ dont on note encore ω une racine :

$$f(x) = \lambda' \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{\mu'\sqrt{3}}{2(x^2-x+1)} + h(x)$$

où h est une fraction rationnelle n'admettant pas le pôle ω. On trouve et les lecteurs sont priés de faire les calculs :

$$\lambda'(2\omega - 1) + \mu' \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$$

D'où :

$$\lambda' = 0, \quad \mu' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Et l'expression de $F(x)$ sur $\mathbf{R}$, confirmée par MAPLE :

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Exemple 25. Calculer :

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^2}$$

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{(x^4-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

Fonction continue sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -2[,]-1, 1[,]1, +\infty[$ où l'on conduira séparément les calculs.

1) Décomposition relative aux pôle réels On commence par le pôle 1 :

$$\begin{aligned} x &= 1 + h \\ x^2 &= 1 + 2h + o(h) \\ (x+1)^2 &= 4 + 4h + o(h) \\ x^2 + 1 &= 2 + 2h + o(h) \\ (x^2+1)^2 &= 4(1 + 2h + o(h)) \\ (x+1)^2(x^2+1)^2 &= 16(1 + 3h + o(h)) \end{aligned}$$

Donc, quand $h \to 0$:

$$f(1+h) = \frac{1}{16h^2(1+3h+o(h))} = \frac{1}{16h^2}(1 - 3h + o(h))$$

D'où la partie polaire relative au pôle 1 :

$$f(x) = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + g(x)\right]$$

où g est une fraction n'admettant plus le pôle 1.
Comme f est paire, on en déduit la décomposition relative au pôle (-1) d'òu :

$$f(x) = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + h(x)\right]$$

h n'ayant plus de pôle réel.

2) Intégration des éléments simples relatifs aux pôles complexes La forme correspondante de $F(x)$ est :

$$F(x) = \mu \arctan x + \lambda \ln(x^2+1) + \frac{Ax+B}{x^2+1} -$$

$$\frac{1}{16}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right] + \frac{3}{16} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

Comme f est une fraction rationnelle paire, il vient $B = 0$, $\lambda = 0$. Dérivons l'expression précédente de F :

$$f(x) = \frac{A(x^2+1) - 2Ax^2}{(x^2+1)^2} + \frac{\mu}{x^2+1} + \dots$$

Les points de suspension correspondent à une fraction n'admettant plus le pôle i. Soit ω tel que $\omega^2 + 1 = 0$:

$$(x^2+1)^2 f(x) = A(x^2+1) - 2Ax^2 + \dots = \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

en substituant ω à x dans cette relation, il vient :

$$-2A\omega^2 = \frac{1}{(\omega^2-1)^2}$$

soit :

$$A = \frac{1}{8}$$

On obtient μ, par exemple en calculant $f(0)$:

$$f(0) = 1 = A + \mu + \frac{1}{16}(1+3+1+3)$$

d'où

$$\mu = \frac{3}{8}$$

Donc :

$$F(x) = \frac{3}{8}\arctan x + \frac{x}{8(x^2+1)} - \frac{1}{16}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right] + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

Où la constante dépend de l'intervalle considéré.

Quatrième partie
Fonctions trigonométriques

8 Fonctions trigonométriques usuelles

On se propose de calculer des primitives et intégrales de fonctions du type $x \mapsto R(\cos x, \sin x)$ où R est *généralement* une fonction rationnelle de deux variables. Pour l'exposé des méthodes générales on se limitera aux calculs de primitives.

8.1 Cas d'expressions polynômiales

On est immédiatement ramené au cas calcul de primitives de la forme :

$$\boxed{I_{p,q}(x) = \int \sin^p x \cos^q x \, \mathrm{d}x, \quad p,\, q \in \mathbf{N}}$$

D'où trois cas :

1) p **impair** On pose $\boxed{\cos x = t}$ car :

$$\boxed{\sin^p x \cos^q x \, \mathrm{d}x = -\cos^q x\,(1-\cos^2 x)^{\frac{p-1}{2}}\, \mathrm{d}(\cos x)}$$

2) q **impair** On pose $\boxed{\sin x = t}$ car :

$$\boxed{\sin^p x \cos^q x \, \mathrm{d}x = \sin^p x\,(1-\sin^2 x)^{\frac{q-1}{2}}\, \mathrm{d}(\sin x)}$$

3) p **et** q **pairs** On linéarise $\sin^p x \cos^q x$. On remarquera que les intégrales de la forme $\int \cos px \sin qx \, \mathrm{d}x$ et autres se calculent par transformation du produit en somme.

Exemple 26. Calculer $F(x) = \int \cos 3x \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

$$\cos 3x \sin 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos 2x}{2} + C}$$

Exemple 27. Calculer $F(x) = \int \sin^2 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.

$$\sin^2 x \cos^4 x = (\sin x\ \cos x)^2 \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \cos^2 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x(1+\cos 2x)$$

D'où :

$$F(x) = \frac{G(x)+H(x)}{8}$$

avec :

$$F(x) = \int \sin^2 2x \, \mathrm{d}x, \quad H(x) = \int \sin^2 2x \cos 2x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C}$$

$$\boxed{H(x) = \frac{1}{2}\int \sin^2 2x \,\mathrm{d}(\sin 2x) = \frac{\sin^3 2x}{6} + C}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C}$$

8.2 Cas général

On essaie un *changement de variable simplificateur*. Le plus simple est de regarder si le graphe de (γ_f) de f possède un **centre de symétrie sur l'axe** Ox, ce qui peut se voir à la calculatrice.

1) Si $O = (0,0)$ est centre de symétrie de (γ_f) La fonction est impaire comme le sinus et on l'intègre comme le sinus c'est-à-dire en posant $\boxed{\cos x = t}$ *[cf aussi l'exemple 11 sur le changement de variable]*.

2) Si $\Omega = (p/2, 0)$ est un centre de symétrie de (γ_f) La fonction f vérifie alors $\boxed{f(p-x) = -f(x)}$ en tout point x du domaine de travail. On fait d'abord une translation pour ramener ce centre en O et on est ramené au cas précédent ce qui revient à poser : $\boxed{\cos(x - p/2) = t}$.

3) Dans les autres cas On recherche une période λ de f-*de préférence la meilleure mais ce n'est pas obligatoire*-que l'on ramène à 2π par l'homothétie $x \mapsto \frac{2\pi x}{\lambda}$, ce qui revient à poser : $\boxed{t = \tan\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right)}$ *[cf l'exemple 13]*. **Évidemment si on ne voit pas mieux que $\lambda = 2\pi$, on pose** $\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ *[cf l'exemple 12 pour un tel changement de variable avec recollement]*.

Exemple 28. Calculer $F(x) = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$.
On trouve deux centres de symétries $(0,0)$ et $(\pi/2, 0)$ ce qui permet de poser $\boxed{\cos x = t}$ ou $\boxed{\sin x = t}$. Choisissons ce dernier à cause du dénominateur plus simple :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^5 x} = \frac{\left(1 - \sin^2 x\right)\,\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^5 x}$$

Le changement de variable $\sin x = t$ ramène alors, sur les intervalles I où le sinus ne s'annule pas, le calcul de $F(x)$ à celui de :

$$\boxed{G(t) = \int \frac{1-t^2}{t^5}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{2t^2} + C}$$

D'où, sur les intervalles I précédents :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x} + C}$$

Exemple 29. Calculer $F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x - \cos 5x}$.
Posons $\boxed{\sin x = t}$. **On essaie de transformer le dénominateur en produit pour factoriser plus aisément la future fraction rationnelle de** t.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\cos x - \cos 5x} = \frac{\mathrm{d}x}{2(\sin 2x \sin 3x)}$$

Comme $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$ n'apparaît pas spontanément, on le force un peu en multipliant haut et bas par $\cos x$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{(\sin 2x \sin 3x)} = \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(\sin 2x \cos x)\sin 3x} = \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{2\sin x(1 - \sin^2 x)(3\sin x - 4\sin^3 x)}$$

On est donc ramené au calcul de :

$$\boxed{G(t) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2(1-t^2)(3-4t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2t}{\sqrt{3}+2t}\right| + K}$$

On trouve :

$$\boxed{A = -\frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{12\sin x} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3} - 2\sin x}{\sqrt{3} + 2\sin x}\right| + K}$$

Exercice 3. Démontrer que, sur des intervalles à préciser :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1 + 3\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{2}}\right) + C$$

et procéder au recollement des solutions.

9 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Il s'agit d'intégrales de la forme :

$$\boxed{R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)}$$

où R est une fraction rationnelle à deux variables. Dans le cas général on pose :

$$\boxed{t = \mathrm{e}^x \quad \text{ou} \quad t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

mais l'on peut quelquefois s'inspirer des changements de variable que l'on ferait pour intégrer $R(\cos x, \sin x)$.

Exemple 30. Calculer :

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} 5x}\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. La fonction à intégrer est impaire ; on s'inspire donc d'un changement de variable qu'on ferait pour intégrer $\frac{\cos 2x}{\sin 5x}$ c'est à dire $t = \operatorname{ch} x$. On va mener le calcul sur $]0, +\infty[$, les primitives sur $]-\infty, 0[$ s'en déduiront.

$$\mathrm{d}t = \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 5x = (16\,t^4 - 12\,t^2 + 1)(t^2 - 1)$$

on est ramené au calcul de :

$$\boxed{G(t) = \int \frac{(2\,t^2 - 1)\mathrm{d}t}{(16\,t^4 - 12\,t^2 + 1)(t^2 - 1)} \quad \text{sur }]1, +\infty[}$$

On factorise alors le polynôme bicarré sous la forme :

$$T(t^2) = 16\,t^4 - 12\,t^2 + 1 = 16\,(t^2 - \alpha^2)(t^2 - \beta^2)$$

En effet les deux racines réelles du polynôme T ont leur demi-somme comprise entre 0 et 1 et $T(0) > 0$ et $T(1) > 0$ donc ces deux racines appartiennent à $]0, 1[$. Notons les α^2 et β^2. avec :

$$\alpha^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \qquad \beta^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$$

La décomposition en éléments simples de :

$$g(t) = \frac{2\,t^2 - 1}{(16\,t^4 - 12\,t^2 + 1)(t^2 - 1)} = \frac{2\,t^2 - 1}{16\,(t^2 - \alpha^2)(t^2 - \beta^2)(t^2 - 1)}$$

peut se faire en fonction de t^2. Il vient :

$$g(t) = \frac{1}{10(\alpha^2 - t^2)} - \frac{1}{10(\beta^2 - t^2)} - \frac{1}{5(1 - t^2)}$$

et donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{20\,\alpha} \ln\left|\frac{\alpha + \operatorname{ch} x}{\alpha - \operatorname{ch} x}\right| - \frac{1}{20\,\beta} \ln\left|\frac{\beta + \operatorname{ch} x}{\beta - \operatorname{ch} x}\right| - \frac{1}{10} \ln\left|\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}\right| + C}$$

Comme $\operatorname{ch} x > 1$ sur l'intervalle d'intégration et $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, on peut supprimer les valeurs absolues dans cette expression de F :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{20\,\alpha} \ln\left(\frac{\alpha + \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x - \alpha}\right) - \frac{1}{20\,\beta} \ln\left(\frac{\beta + \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x - \beta}\right) - \frac{1}{10} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}\right) + C}$$

Remarque 7. L'expression de $\sin 5x$ à l'aide de $\cos x$ donne :

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1$$

Les racines distinctes du polynôme $16\,t^4 - 12\,t^2 + 1$ sont donc les $\cos(k\pi/5)$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ qui s'opposent deux à deux : $\cos(4\pi/5) = -\cos(\pi/5)$, $\cos(3\pi/5) = -\cos(2\pi/5)$. De plus puisque $0 < \cos(2\pi/5) < \cos(\pi/5) < 1$, il vient :

$$\alpha^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right), \ \beta^2 = \cos^2\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

de sorte qu'on peut adopter :

$$\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \ \beta = \cos\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)$$

□

Cinquième partie
Intégrales abéliennes

Sixième partie
Quelques exemples en Maple

10 Commandes Maple