

TACS EN VRAC (SPE)

(TAC : Théorème à citer)

ALGEBRE

1. Réduction

$K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E espace vectoriel sur K .

- $u \in L(E), a \neq 0, (a, b) \in K^2$. Si $v = au + bId_E$, alors $Sp_K(v) = \{\mu = a\lambda + b \mid \lambda \in Sp_K(u)\}$
- $u \in L(E), \lambda_1, \dots, \lambda_p$ valeurs propres de u distinctes. Alors la somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres de u 2 à 2 distinctes est libre.
- $(u, v) \in (L(E))^2, u \circ v = v \circ u$. Alors $Im(u), Ker(u)$ et les sous-espaces vectoriels propres de u sont stables par v .
- $0 \in Sp_K(u) \Leftrightarrow u$ non injective et alors $E_0(u) = Ker(u)$.
- $\forall (u, v) \in (L(E))^2, Ker(u) \subset Ker(v \circ u)$ et $Im(v \circ u) \subset Im(v)$.
- Soit $u \in L(E), R \in K[X]$. Si $\lambda \in Sp_K(u)$, alors $R(\lambda) \in Sp_K(R(u))$. C'est-à-dire $R(Sp_K(u)) \subset Sp_K(R(u))$.
- Théorème de décomposition des noyaux : Si $A_1, \dots, A_n \in K[X]$ et sont 2 à 2 premiers entre eux, alors

$$Ker\left(\prod_{i=1}^n A_i\right)(u) = \bigoplus_{i=1}^n Ker(A_i(u)).$$

Dans la suite, E est de dimension finie sur K .

- 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- $u \in L(E)$ est diagonalisable
 $\Leftrightarrow E$ est somme directe des sous-espaces propres de u
 \Leftrightarrow La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E
 $\Leftrightarrow \exists B$ base de E formée de vecteurs propres de u
 \Leftrightarrow Le polynôme caractéristique de u est scindé dans $K[X]$ et $\forall \lambda \in Sp_K(u)$ la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique de u
 \Leftrightarrow Il existe un polynôme scindé dans $K[X]$, à racines simples et annulateur de u
- Si $\dim(E) = n$ et si $u \in L(E)$ a n valeurs propres toutes distinctes, alors u est simplement diagonalisable, donc diagonalisable. Ses sous-espaces propres sont alors des droites vectorielles.
- u est trigonalisable \Leftrightarrow Le polynôme caractéristique de u est scindé dans $K[X]$.
- $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente $\Leftrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ (FAUX si $K = \mathbb{R}$).
- Théorème de Cayley-Hamilton : En dimension finie, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E est annulateur de u . Si $M \in M_n(K), P_M(M) = 0$.

2. Espaces préhilbertiens réels

Dans cette partie, E est un espace préhilbertien réel.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2, | \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\|$. Egalité si $\{x, y\}$ est lié.

- Inégalité de Minkowski : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
 - Théorème de Pythagore : Pour tout système orthogonal (x_1, \dots, x_p) , $\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$
- On a l'équivalence : $x_i \perp x_j \Leftrightarrow \|x_i + x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2$
- Identité du parallélogramme : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
 - Formule de polarisation : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
 - Si F est un sous-espace de dimension finie de E , $E = F \oplus F^\perp$. Si de plus E est de dimension finie, $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$
 - Théorème de la projection orthogonale sur un sous-espace F de dimension finie : Soit p la projection orthogonale sur F parallèlement à F^\perp .
 - 1) $F^\perp = \text{Ker}(p)$
 - 2) $y = p(x) \Leftrightarrow (y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp)$
 - 3) La distance de $x \in E$ à F est atteinte en un et un seul point de F : $p(x)$, et $\|x - p(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$
 - 4) Si (f_1, \dots, f_p) est une base orthonormée de F , $\forall x \in E, p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | f_i \rangle f_i$
 - Inégalité de Bessel : Si $(x_i)_{i \in I}$ ($I \subset \mathbb{N}$, fini ou non) est un système orthonormé de E , alors $\forall x \in E, \sum_{i \in I} \langle x | x_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$

Dans la suite, E est de dimension finie sur \mathbb{K} .

- Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Soit $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base quelconque de l'espace euclidien E . Il existe une unique base orthonormée $B' = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :
 - a) $\forall k \in [1, n], E_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
 - b) $\forall k \in [1, n], \langle e_k | u_k \rangle > 0$
- $u \in O(E)$
 - $\Leftrightarrow u$ conserve le produit scalaire / la norme
 - $\Leftrightarrow u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$
 - \Leftrightarrow L'image par u d'une base orthonormée est une base orthonormée
- Si $M \in O(n), Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset \{-1, +1\}$ et $\det(M) = \pm 1$
- $\forall u \in L(E), \exists ! u^* \in L(E), \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$. u^* est l'adjoint de u et on a dans une base orthonormée B : $M_B(u^*) = {}^t M_B(u)$.
- $\forall u \in L(E), \text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.
- Théorème spectral : E euclidien, $u \in L(E)$ symétrique ($u^* = u$). Alors u est diagonalisable, les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux et il existe une base orthonormée de E formée des vecteurs propres de u . u peut être réduit dans une base diagonalisante orthonormée.

$M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = M$. Alors les valeurs propres de M sont toutes réelles, M est diagonalisable et $\exists P \in O(n), \exists D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) telles que $M = PDP^{-1} = PD^t P$. On dit que M est orthodiagonalisable.

• Réduction des formes quadratiques en dimension finie :

1) Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$. Alors $\varphi(x, y) = {}^t XAY = {}^t YAX$ où X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées respectives de x et y dans la base B ($\Rightarrow \varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i y_j$).

La matrice symétrique réelle A est la matrice de φ (ou de ϕ) dans la base B .

2) Pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur \mathbb{R}^n dont A est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

3) Si B et B' sont 2 bases de E avec $P: B \rightarrow B'$, alors $A' = {}^t PAP$.

3. Algèbre générale

• Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les \bar{k} où $n \wedge k = 1$. Ce sont aussi les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

Il y en a $\varphi(n) = \text{Card}\{k \mid 1 \leq k \leq n \text{ et } k \wedge n = 1\}$.

• Théorème de Lagrange : Soit G un groupe fini et $a \in G$.

1) L'ordre de a divise $\text{Card}(G) = |G|$

2) L'ordre d'un sous-groupe de G divise l'ordre de G

• Tout idéal de \mathbb{Z} est principal, c'est-à-dire de la forme $a\mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$. Idem dans $\mathbb{K}[X]$.

• $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps $\Leftrightarrow n$ est premier.

• Théorème chinois : $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \wedge n = 1$. Alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

D'où $\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$.

• Petit théorème de Fermat : $n \in \mathbb{N}^*$

1) Si $k \wedge n = 1, n \mid k^{\varphi(n)} - 1$ ou encore $k^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$

2) Si p est premier, $\forall k \in \mathbb{Z}, k^p \equiv k[p]$ ou $p \mid k^p - k$

ANALYSE

1. Séries numériques

E est un espace vectoriel normé complet (tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet). $u_n \in E$. Le plus souvent, $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

• Série géométrique : $q \in \mathbb{C}$. $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ et $n+1$ si $q = 1$

$\sum q^k$ converge $\Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ et alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

• Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

• Série de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

• Si $\sum u_n$ est absolument convergente (i.e. $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ est convergente et $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

• Si $u_n \in \mathbb{R}$ et $u_n \geq 0$ pour n assez grand, alors $\sum u_n$ absolument convergente $\Leftrightarrow \sum u_n$ convergente.

• Théorème de télescopage : Si $u_n = a_{n+1} - a_n$, $\sum u_n$ converge \Leftrightarrow (la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente). On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -a_0 + \lim_{p \rightarrow +\infty} a_p$$

• Théorème de majoration : $\sum u_n$ est absolument convergente $\Leftrightarrow \exists M \geq 0, \forall r \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^r |u_k| \leq M$

• Critère de comparaison ou de domination : Si en $+\infty$, $u_n = O(v_n)$, alors :

1) $\sum v_n$ absolument convergente $\Rightarrow \sum u_n$ absolument convergente

2) $\sum |u_n|$ divergente $\Rightarrow \sum |v_n|$ divergente

• Critère d'équivalence : Si $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$, $\sum u_n$ absolument convergente $\Leftrightarrow \sum v_n$ absolument convergente.

• La somme de 2 séries convergentes est convergente. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. On ne peut rien affirmer quant à la nature de la somme de 2 séries divergentes sans une étude plus détaillée.

• Règle de Riemann pour les séries :

1) Si pour un $\alpha > 1$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ (ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^\alpha u_n) = 0$), alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2) Si $\frac{1}{n} = O(u_n)$, alors $\sum |u_n|$ est divergente.

• Règle de D'Alembert pour séries numériques : $u_n \in \mathbb{C}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall n \geq n_0, u_n \neq 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \geq 0, \text{ alors :}$$

1) Si $0 \leq l < 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente. De plus, si $l < k < 1$, $u_n = O(k^n)$.

2) Si $l > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. De plus, si $1 < k < l$, $k^n = O(u_n)$.

3) Si $l = 1$, on ne peut conclure.

• Règle de sommation des relations de négligeabilité, de domination et d'équivalence :

On suppose $u_n \geq 0$, $v_n \in E$.

1)a) Si $\sum u_n$ converge et si $v_n = o(u_n)$, alors $\sum v_n$ est absolument convergente et $R_{n-1}(v) = \sum_{k \geq n} v_k = o(R_{n-1}(u))$

b) Si $\sum u_n$ diverge et si $v_n = o(u_n)$, alors $V_n = \sum_{k=0}^n v_k = o(U_n)$

2) Même chose avec $o \leftrightarrow O$

On suppose $u_n \geq 0$ pour n assez grand et $v_n \in \mathbb{R}$.

3)a) Si $\sum u_n$ converge et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} R_n(v)$ (tendent vers 0)

b) Si $\sum u_n$ diverge et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ (tendent vers $+\infty$)

• Théorème des séries alternées : Si $u_n \in \mathbb{R}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$ et si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ en décroissant, alors $\sum u_n$

converge et :

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ a le signe de u_0 ($= |u_0| \geq 0$)

2) $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$

3) $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, U_{2p+1} \leq U \leq U_{2q}$ où $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

On a le théorème analogue si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$. Alors $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq 0$ a toujours le signe de u_0 et $U_{2p+1} \geq U_{2q}$.

- Théorème de comparaison série/intégrale : Si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur \mathbb{R}_+ , alors :

$$1) \forall k \geq 1, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

2) $\sum f(k)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature, la série de terme général $w_n = -f(n) + \int_{n-1}^n f(t) dt$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est

convergente et $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(t) dt + C + o(1)$

2. Fonctions intégrables

$a > 0$ fixé. Souvent $a = 1$ ou $\frac{1}{2}$ ou $e \dots$

- $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t^\alpha} \in L^1([a, +\infty[)$

- $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t^\alpha} \in L^1(]0, a])$

- $I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge $\Leftrightarrow \lambda > 0$. On a alors $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

- Dans un espace vectoriel normé complet, si $\int_a^b \|f(t)\| dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$.

- Critère de comparaison positif : Soient f et g continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ telles que $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

1) Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, $\int_a^b f(t) dt$ converge et $0 \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

2) Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

- Critère de domination : Soient f et g continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{R} .

1) Si, au voisinage de b^- , $f = O(g)$, alors g sommable sur $[a, b[\Rightarrow f$ sommable sur $[a, b[$.

2) Si f et g sont positives, si $f = O(g)$ et si f n'est pas sommable sur $[a, b[$, alors g n'est pas sommable sur $[a, b[$.

- Critère d'équivalence positif : Soient f et g continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{R} telles que $f \geq 0$ sur $[a, b[$ et $f \underset{b^-}{\sim} g$. Alors g est positive au voisinage de b^- et les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature : $f \in L^1([a, b[) \Leftrightarrow g \in L^1([a, b[)$

- Règle de Riemann pour les intégrales, borne $+\infty$: Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$

1) Si pour un $\alpha > 1$, $f(t) = O(\frac{1}{t^\alpha})$ en $+\infty$, alors f est sommable sur $[a, +\infty[: f \in L^1([a, +\infty[)$.

2) Si $\frac{1}{t} = O(f(t))$ en $+\infty$, alors f n'est pas sommable sur $[a, +\infty[: f \notin L^1([a, +\infty[)$.

- Théorème d'intégration de la relation de négligeabilité :

$I = [a, +\infty[$, $f \in CM(I, E)$, $g \in CM(I, \mathbb{R}_+)$, $g \geq 0$ sur I et $f(t) = o(g(t))$

1) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge (i.e. $g \in L^1(I)$), alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente (i.e. $f \in L^1(I)$) et on a $\int_x^{+\infty} f(t)dt = o(\int_x^{+\infty} g(t)dt)$.

2) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t)dt = o(\int_a^x g(t)dt)$.

• Théorème analogue avec $o \leftrightarrow O$.

• Théorème d'intégration de la relation d'équivalence : $I = [a, +\infty[$, $(f, g) \in (CM(I, \mathbb{R}))^2$, $g \geq 0$ sur I et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$

1) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge (i.e. $g \in L^1(I)$), alors $f \in L^1(I)$ et $\int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)dt$ (tendent vers 0 en $+\infty$).

2) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge (i.e. $g \notin L^1(I)$), alors $\int_a^x f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \int_a^x g(t)dt$ (tendent vers $+\infty$ en $+\infty$).

• Théorème du changement de variable : Soit φ une bijection de classe C^1 de $] \alpha, \beta [$ sur $] a, b [$, $f \in CM(] a, b [, \mathbb{C})$.

1) $f \in L^1(] a, b [) \Leftrightarrow \varphi' \cdot (f \circ \varphi) \in L^1(] \alpha, \beta [)$

2) Les intégrales $\int_a^b f(u)du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature et sont égales lorsqu'elles convergent.

3. Suites et séries de fonctions

I intervalle de \mathbb{R} , F espace vectoriel normé complet ou de dimension finie, le plus souvent $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

• Théorème de continuité d'une limite uniforme : E espace vectoriel normé de dimension finie, $X \subset E$.

Une limite uniforme sur X de fonctions continues sur X est continue sur X , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)) = f(a) \quad (a \in X \text{ et } f_n \text{ continues au point } a).$$

• Théorème d'intégration sur un segment d'une limite uniforme : $X = [a, b]$ intervalle compact de \mathbb{R} ,

$$f_n \in CM([a, b], F), F \text{ espace de Banach. Si } f_n \xrightarrow{u} f \text{ sur } X, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)dt.$$

• Théorème de dérivation d'une limite : I intervalle de \mathbb{R} , $f_n \in C^1(I, F)$, F espace de Banach. Si $f_n \xrightarrow{s} f$ sur I et

$$\text{si } \exists g : I \rightarrow F, f_n' \xrightarrow{u} g \text{ sur } I, \text{ alors } f \in C^1(I, F) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) : f' = g.$$

Même conclusion si $f_n' \xrightarrow{u} g$ sur tout segment de I .

• Théorème de la double limite : $f_n : X \rightarrow F$, $X \subset E$, F espace vectoriel normé complet, $a \in \bar{X}$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ sur X

et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a, x \in X} f_n(x)$ existe et vaut $l_n \in F$, alors la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l dans F , f admet en a une

$$\text{limite égale à } l. \text{ Autrement dit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow a, x \in X} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a, x \in X} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)).$$

• Théorème de convergence dominée : Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications telle que $f_n \xrightarrow{s} f$ sur I .

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f_n, f) \in (CM(I, \mathbb{K}))^2$ et si $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi, \text{ alors } f \in L^1(I) \text{ et } \int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ est l'hypothèse de domination. $\varphi \in L^1(I)$ et ne dépend pas de n .

• $X \subset E$ ($X = I$ intervalle de \mathbb{R} par exemple). Soit $u_n : X \rightarrow F$.

$\sum u_n$ uniformément convergente sur X

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, R_n \text{ défini sur } X \text{ et } R_n \xrightarrow{u} 0 \text{ sur } X$$

$$\Leftrightarrow \left(U_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de fonctions uniformément convergente sur } X$$

• Soit $u_n : X \rightarrow F$. Si F est complet, toute série normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .

- Théorème de continuité d'une somme uniforme : $u_n : I \rightarrow F$. Si les u_n sont continues sur I et si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur tout segment de I , alors $U = \sum_{n \geq 0} u_n$ est continue sur I .
- Théorème d'intégration terme à terme :
 - 1) Si I est un segment, $u_n, U \in CM(I, \mathbb{C})$ et $\sum u_n$ uniformément convergente sur I , alors $\int_I \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \int_I u_n$.
 - 2) Soit I intervalle quelconque, $u_n, U \in CM(I, \mathbb{C})$, $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Si $u_n \in L^1(I, \mathbb{C})$ et si $\sum_{n \geq 0} \int_I |u_n|$ converge, alors $U \in L^1(I, \mathbb{C})$ et $\int_I \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \int_I u_n$. De plus, $\left| \int_I U \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n|$.
- Théorème de dérivation terme à terme : I intervalle de \mathbb{R} , $u_n \in C^1(I, F)$, F espace de Banach. Si $\exists x_0 \in I, \sum_{n \geq 0} u_n(x_0)$ converge et si $\sum_{n \geq 0} u_n'$ est uniformément convergente sur I ou sur tout segment de I , alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I, \frac{d}{dx} \left(\sum_{n \geq 0} u_n(x) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{d}{dx} u_n(x) \right)$.
- Théorème de la double limite : I intervalle de \mathbb{R} , $a \in \bar{I}$. Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I et si $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe et vaut l_n , alors la série $\sum_{n \geq 0} l_n$ est convergente et $\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n \geq 0} f_n(x) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$.

4. Intégrales paramétrées

- Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, et soit $f : A \times [a, b] \rightarrow F$ continue. Alors la fonction $g : A \rightarrow F$ définie par $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur A .
- Soit A un intervalle, et soit $f : A \times [a, b] \rightarrow F$ continue et telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $A \times [a, b]$. Alors la fonction $g : A \rightarrow F$ définie par $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur A et on a $\forall x \in A, g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.
- Continuité sous le signe somme : Soit I un intervalle quelconque. Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, et soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par rapport à la première variable et telle que $\forall x \in A$ la fonction $f(x, \cdot)$ soit continue par morceaux sur I . On suppose de plus qu'il existe φ intégrable sur I telle que $\forall t \in I, \forall x \in A, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$. Alors la fonction $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .
- Dérivation sous le signe somme : Soit A un intervalle, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent et telle que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et vérifie aussi les mêmes hypothèses. Alors la fonction $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^n sur A et on a :

$$\forall x \in A, \forall k \in \{1, \dots, n\}, g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

Remarque : Pour les 2 théorèmes précédents et lorsque A est un intervalle de \mathbb{R} , il suffit d'établir les hypothèses de domination sur tout segment de A (domination locale). La dominatrice φ_k dépend du segment, de k mais pas de x .

- Théorème de Fubini : Soient $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ 2 segments. Soit $f : I \times J \rightarrow F$ continue.

$$\text{Alors } \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

- Fonction Gamma : Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; $\Gamma(n+1) = n!$; $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

5. Séries entières

- Lemme d'Abel : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de complexes, $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Soit $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors on a :
 - 1) Si $|x| < r$, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente.
 - 2) La série de fonctions $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur tout compact K du disque ouvert $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ et sur tout disque fermé $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a < r\} \subset D_r$.
- Critère de D'Alembert pour séries entières : Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière. Si $\exists N, \forall n \geq N, a_n \neq 0$ et si la suite $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, de limite l , alors le rayon de convergence de S vaut $\rho(S) = \frac{1}{l}$.
- Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $T(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$.
 - 1) Si $|a_n| \sim_{+\infty} |b_n|$, alors $\rho(S) = \rho(T)$.
 - 2) S'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = P(n)a_n$, alors $\rho(S) = \rho(T)$.
- $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{C}$, $R = \rho(S) > 0$, $] -R, R[$ l'intervalle ouvert de convergence de $S(x)$. Alors :
 - 1) Sur $] -R, R[$, on peut dériver S terme à terme et la série dérivée S' a même rayon de convergence que S .
 - 2) S est de classe C^∞ sur $] -R, R[$. On peut dériver S terme à terme sur $] -R, R[$ à tout ordre.
On a $\forall k \in \mathbb{N}, S^{(k)}(0) = k! a_k$ et si $|x| < R, S^{(k)}(x) = \sum_{p=k}^{+\infty} a_p p(p-1)\dots(p-k+1)x^{p-k}$.
 - 3) Pour $|x| < R$, on peut intégrer S terme à terme sur $[0, x]$ et la série intégrée a même rayon de convergence que S : c'est l'unique primitive de S sur $] -R, R[$ qui s'annule en 0.
- Toute fraction rationnelle n'admettant pas 0 comme pôle est DSE(0). On obtient le DSE(0) par décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} , le rayon de convergence est le plus petit module des pôles.
- $\forall z \in \mathbb{C}, \cos(iz) = ch(z)$ et $\sin(iz) = ish(z)$.

6. Séries de Fourier

Dans cette partie, $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} u_k$ désigne, quand elle converge, la somme de la série de terme général $v_k = u_k + u_{-k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Alors $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k + u_{-k})$.

- Théorème de Dirichlet : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de période 2π et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors la série de Fourier $S(f)$ de f converge simplement sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, S(f)(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \right)$.
- Théorème de convergence normale : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de période 2π , continue et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R} et vaut f .

- Formule de Parseval : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de période 2π , continue par morceaux sur \mathbb{R} (i.e. sur tout/un segment de longueur 2π), alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ ou encore $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$.

7. Fonctions de plusieurs variables

D ouvert de \mathbb{R}^n . $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in D, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$.

- Applications partielles : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La i -ème application partielle ϕ_i au point $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est continue, il en est de même de ses applications partielles, mais la réciproque est fautive.

- f est dite de classe C^1 sur D si chacune de ses dérivées partielles existe et est continue sur D .

- Différentielle : Si f est de classe C^1 sur D , alors, $\forall x \in D, \forall h \in \mathbb{R}^n$ avec $x+h \in D$, on a :

$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + o(\|h\|)$. Cette expression est le développement limité de f en x à l'ordre 1.

$df(x) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$ est l'application linéaire tangente (ou différentielle) de f au point x .

- Si $f = h \circ g \in C^1(D)$, alors $\forall x \in D, \forall i \in \{1, \dots, p\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h}{\partial u_k}(g(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)$.

- Théorème de Schwarz : Si $f \in C^2(D)$, alors $\forall x \in D, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x)$.

- Caractérisation des extrema : Soit f de classe C^1 sur D . Si un point a intérieur à D correspond à un extremum local de f , alors les dérivées partielles de f en a s'annulent. a est alors appelé un point critique de f . Dans le cas des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on note si a est un élément de \mathbb{R}^2 : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$. On a :

1) Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors a est un maximum local de f .

2) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors a est un minimum local de f .

3) Si $rt - s^2 < 0$, alors a n'est pas un extremum de f .

- Formule de Taylor-Young : Si $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , et (a, b) un point de U , alors on a pour h et k assez petits :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right] + o(\|h, k\|^2).$$

- On appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice de $df(a)$, relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n .

Elle est notée $J_f(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right]$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$. Son déterminant est appelé le jacobien de f au point

a et est noté $j_f(a)$.

- Théorème d'inversion : Si f est de classe C^1 sur D et injective, alors f est un C^1 -difféomorphisme de D sur $f(D)$ si et seulement si, $\forall a \in D, df(a)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dans ce cas, $J_{f^{-1}}(f(a)) = (J_f(a))^{-1}$.

8. Espaces vectoriels normés

E espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , de dimension finie ou non.

- Une norme est une application $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

$d(x, y) = \|x - y\|$ est la distance associée à $\|\cdot\|$.

- Normes usuelles :

1) Sur \mathbb{K}^n : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

2) Sur $C([a, b], \mathbb{K})$: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$

3) Sur $M_n(\mathbb{K})$: $\|M\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|$, $\|M\|_2 = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\|M\|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|$

- 2 normes N_1 et N_2 de E sont équivalentes si et seulement si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

- U partie de E est un ouvert si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points ($\Leftrightarrow U = \overset{\circ}{U}$).
- U partie de E est un fermé si et seulement si $\bar{A} = A$ où \bar{A} est l'adhérence de A . x est adhérent à A si et seulement si on peut tendre vers x « en restant dans A ».
- A, B parties de E . A est dense dans B si et seulement si \bar{A} contient B .
- L'image réciproque continue d'un ouvert (resp. d'un fermé) est un ouvert (resp. un fermé).
- Compacité : Une partie A de E est dite compacte si et seulement si de toute suite de points de A on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de A . Si A est compacte, A est fermée et bornée. La réciproque n'est vraie qu'en dimension finie. Si A est compacte et si $X \subset A$ est fermée, X est compacte. Si A est compacte, A est complète (voir plus loin). Un produit de compacts est compact.
- L'image continue d'un compact est compacte.
- Toute application continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes.
- Théorème de Heine-Borel : Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.
- Complétude : E est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy de points de E converge. Si E est complet, E est un espace de Banach. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.