

Puissance d'un nombre relatif

Puissance entière d'un nombre relatif :

1. Puissances positives :

a désigne un nombre relatif et n un entier positif non nul.

Définition :

a^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$$

Conventions :

- Pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$.- Pour tout nombre a , $a^1 = a$.

Exemples :

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = +81$$

Cas particuliers :

- Si $n=1$, $a^1 = a$.
- Si $n=2$, a^2 se lit **a au carré**.
- Si $n=3$, a^3 se lit **a au cube**.

2. Puissances négatives :

Définition :

a^{-n} désigne l'inverse de a^n .

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, où a est un nombre relatif différent de zéro.

Exemples :

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3) \times (-3)} = \frac{1}{9}$$

3. Produit de puissances :

Propriété :

Soient m, n deux entiers relatifs et a un nombre relatif non nul.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Preuve :

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{m+n \text{ fois}}$$

Exemples :

$$5^3 \times 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$$

$$7^4 \times 7^{-5} = 7^{4+(-5)} = 7^{-1}$$

4. Quotient de puissances :

Propriété :

Soient m, n deux entiers relatifs et a un nombre relatif non nul.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Preuve :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

Exemples :

$$\frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$$

$$\frac{10^{-15}}{10^3} = 10^{-15-3} = 10^{-18}$$

$$\frac{7^{-4}}{7^{-9}} = 7^{-4-(-9)} = 7^{-4+9} = 7^5$$