

Arithmétique

Exercice 1 - Arithmétique en terminale

- 1-Etablir que pour tout $(a,b,q) \in \mathbb{Z}^3, \text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,a-bq)$
- 2-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}, \text{pgcd}(5n^3-n, n+2) = \text{pgcd}(n+2, 38)$

Exercice 2 - Démontrer qu'un entier est divisible par 3

n désigne un nombre entier naturel.

Démontrer que $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.

Exercice 3 - Démontrer la propriété suivante :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, alors on a :

$$\text{PGCD}(a;b) \times \text{PPCM}(a;b) = a \times b.$$

On admettra la propriété suivante :

Si a' et b' sont deux entiers naturels premiers entre eux alors $\text{PPCM}(a';b') = a' \times b'$.

Exercice 4 - Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3 \times \text{ppcm}(a;b) = ab. \end{cases}$$

Exercice 5 - Montrer qu'un entier n'est jamais un nombre premier

On désigne par a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

- 1) Développer le carré $(a^2 + 2b^2)^2$.
- 2) En déduire que l'entier naturel $a^4 + 4b^4$ n'est jamais un nombre premier.

Exercice 6 - Congruences

- Transformer 235 en écriture en base 2.
- Transformer $\overline{101101}^2$ en écriture en base 10.
- Transformer 65 en écriture en base 5.
- Transformer $\overline{231}^7$ en écriture en base 2.

Exercice 7 - Différence de cube

- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
- résoudre l'équation $x^3 - y^3 = 127$ où les inconnues sont des entiers naturels.

Exercice 8 - Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

On note $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$.

D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$,

il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < |b|.$$

Démontrer que le couple (q, r) est unique.

Exercice 9 - Problème sur les racines carrées

On note $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n soit le carré d'aucun entier.

Rappel : tout entier naturel admet une décomposition unique en produit de facteurs premiers.

On suppose que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et donc qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

tels que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

- Exprimer p^2 en fonction de n et q .
- Que peut-on dire des exposants des facteurs premiers figurant dans la décomposition de n ?
- Conclure.
- Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10 - Somme à calculer

On note $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{x^{2^k} + 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}} - 1}.$$

Exercice 11 - Calcul d'une somme

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{on a } \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 12 - Puissance, arithmétique et raisonnement par récurrence

On note x un réel positif.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 13 - Contraposée et raisonnement par récurrence

On note $n \in \mathbb{N}^*$.

Le but de cet exercice est de montrer par contraposition la propriété suivante :

Si l'entier n^2-1 n'est pas divisible par 8 alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1,2,3\}$ (à justifier). Prouver la contraposée.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 - Multiple d'un nombre

Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, n^3-n est un multiple de 3.

Exercice 15 -Raisonnement par récurrence

1. Développer, réduire et ordonner $\square$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, n^5-n est un multiple de 5.

Exercice 16 -Somme des cubes

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. En déduire la valeur de $A = 1^3+2^3+3^3+\dots+10^3$.

Exercice 17 -Multiple d'un nombre

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, n^3-n est un multiple de 3.

Exercice 18 -Bac s spécialité et arithmétique

Soit n un entier naturel.

1. trouver suivant les valeurs de n , les restes de la division de 5^n par 13.
2. En déduire que $1981^{1981}-5$ est divisible par 13.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N =$ est divisible par 13.

Exercice 19 - Problème sur l'arithmétique

Soit n un entier relatif et $a = 5n^3 + n$. Montrer que a est divisible par 3.

Exercice 20

Soit n un entier naturel

Montrer que $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

Exercice 21

Soit p un nombre entier naturel impair. Montrer que la somme de p entiers naturels consécutifs est un multiple de p .

Exercice 22

Indice : Théorème de Bézout

Soit x un réel. Montrer que si x^7 et x^{12} sont des nombres rationnels, alors x l'est également.

Exercice 23

Indice: Lemme de Gauss

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$$

Exercice 24

Soit n un entier naturel

Exercice 25 - Nombres de Mersenne

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombre de la forme : $M_n = 2^n - 1$ dits nombres de Mersenne.

1. Montrer que M_2, M_3, M_5, M_7 sont des nombres premiers.

2. Montrer que si p est un diviseur de n , alors M_n est divisible par $2^p - 1$.

En déduire que si M_n est un nombre premier alors n l'est également.

3. Etudier la réciproque.

Exercice 26

Trouver tous les couples (a,b) d'entiers naturels vérifiant : $\text{ppcm}(a,b) = 40$ et $a+b=60$

Exercice 27

Soit a et b deux entiers naturels.

Montrer que si $\text{pgcd}(a,b) = 1$ alors $\text{pgcd}(a,b^2) = 1$

Exercice 28

Soit n un entier naturel impair,

Montrer que parmi $(n-1)^2+1$ entiers, il en existe n dont la somme est un multiple de n .

Exercice 29

Soit n un entier naturel

1. Démontrer que n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par $(n+1)$
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2+15n+19$ est divisible par $n+1$
3. En déduire que pour tout entier naturel n , $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2 .

Exercice 30 - Nombres de Fermat .

Soit n un entier naturel .

- a. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2
- b. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombres de Fermat). Montrer que les F_n sont deux à deux premiers entre eux.

