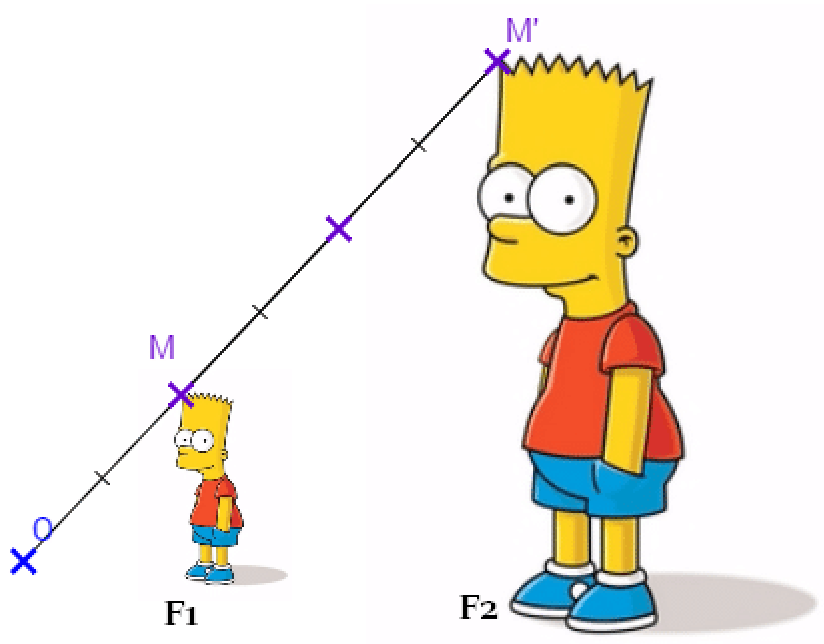
Homothéties

I. L'homothétie

1.Introduction

Définition

- La figure F_2 est un **agrandissement** de rapport 3 de la figure F_1.
- On dit que la figure F_2 est l'**image** de la figure F_1 par l'**homothétie** de centre O et de rapport 3.
- La figure F_1 est une réduction de la figure F_2 de rapport $\frac{1}{3}$.
- On dit que la figure F_1 est l'**image** de la figure F_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.



2. image d'un point

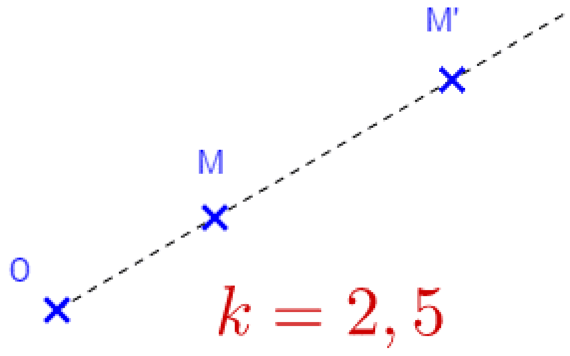
Définition

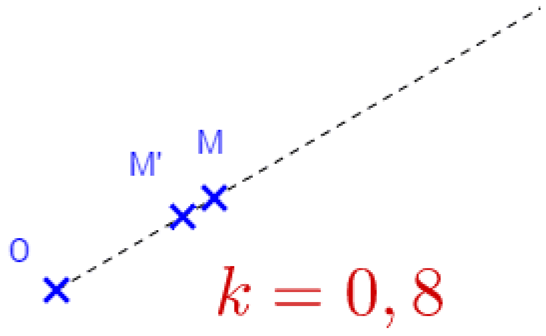
L'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k positif est le point M' tel que :

- M' appartient à la demi-droite [OM);
- $OM' = k \times OM$

Exemples :

Construire l'image du point M par l'homothétie de rapport k = 2,5 puis k = 0,8.



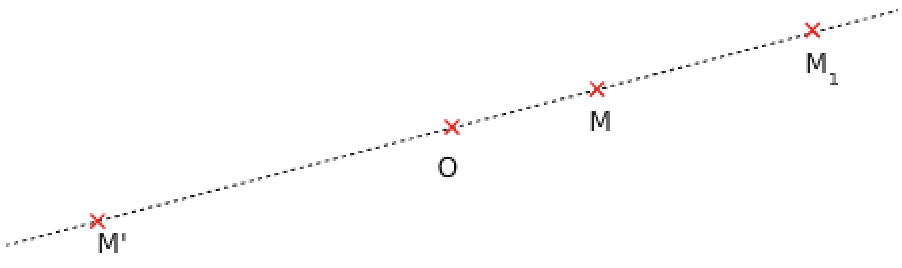


Remarque :

Dans le cas où $k = 1$, les images sont confondues avec les points de départs.

Dans le cas où $k < 0$, par exemple $k = -2{,}5$, on construit l'image M_1 de M

par l'homothétie de centre O et de rapport 2 puis on construit le symétrique M' de M_1 par rapport à O.



3. Image d'un segment

Propriété :

On considère A,B et O trois points du plan et k un nombre positif.

Si les points A' et B' sont les images respectives des points A et B

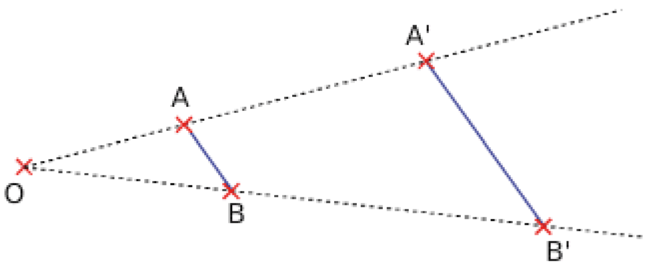
par l'homothétie de centre O et de rapport k

alors :

- $A'B' = k\times AB$

- $(AB)//(A'B')$

Démonstration :



Par définition de l'homothétie de centre O et de rapport k, nous avons :

$OA' = k\times OA$ et $OB' = k\times OB$ donc $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$

Ainsi en utilisant la réciproque du théorème de Thalès, nous en déduisons

que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

Ensuite, nous pouvons appliquer la partie directe du théorème de Thalès.

On sait que : $A \in (OA')$, $B \in (OB')$,$(AB)//(A'B')$.

donc nous avons les égalités suivantes :

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k$ ainsi $A'B'=k\times AB$.

4. Les propriétés des homothéties

Propriété :

L'homothétie conserve l'alignement, les milieux et la mesure des angles.

Propriété :

Dans une homothétie de rapport k positif :

- les longueurs sont multipliées par k;
- les aires sont multipliées par k^2.

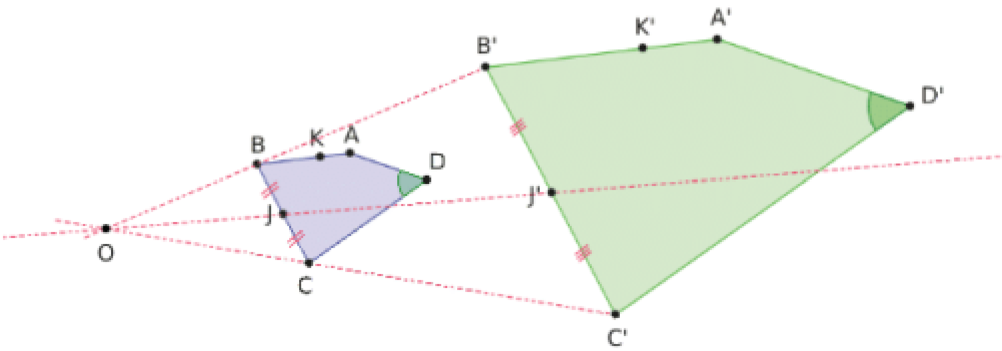
Propriété :

On considère la figure F_2 qui est l'image de la figure F_1 par une homothétie de centre O et de rapport k.

- Si $k>1$ alors F_2 est un agrandissement de F_1 par cette homothétie;
- Si $0<k<1$ alors F_2 est une réduction de F_1 par cette homothétie.

Exemple :

Le quadrilatère A'B'C'D' est l'image du quadrilatère ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $k=2{,}1$.



- Les points A,B,K sont alignés donc leurs images respectives A',B',K' sont alignées;
- Le point J est le milieu de [BC] donc son image J' est le milieu du segment [B'C'];
- L'angle $\widehat{A'D'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{ADC}$, ils ont donc la même mesure;
- Les longueurs sont multipliées par 2,1 ainsi $B'C'=2{,}1\times BC$;
- Les aires sont multipliées par $2{,}1^2=4{,}41$ ainsi $Aire_{A'B'C'D'}=4{,}41\times Aire_{ABCD}$.