# Homothéties

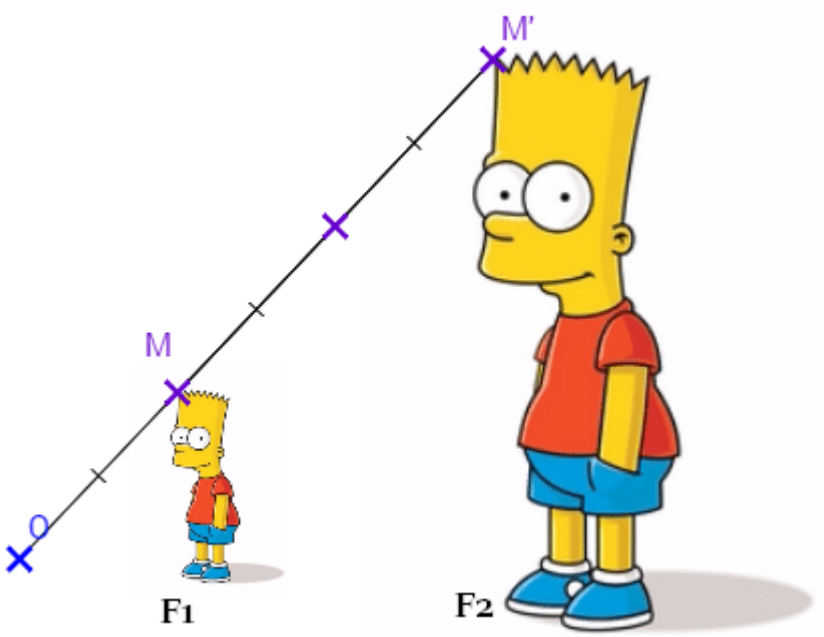
## I. L'homothétie

### 1.Introduction

**Définition**

- La figure $F_2$ est un **agrandissement** de rapport 3 de la figure $F_1$.
- On dit que la figure $F_2$ est l'**image** de la figure $F_1$ par l'**homothétie** de centre O et de rapport 3.
- La figure $F_1$ est une réduction de la figure $F_2$ de rapport $\frac{1}{3}$.
- On dit que la figure $F_1$ est l'**image** de la figure $F_2$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.




## 2. image d'un point

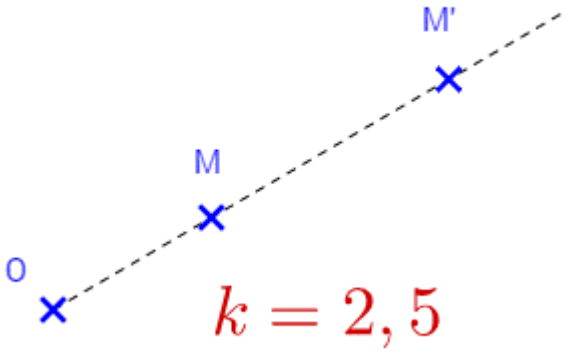
Définition

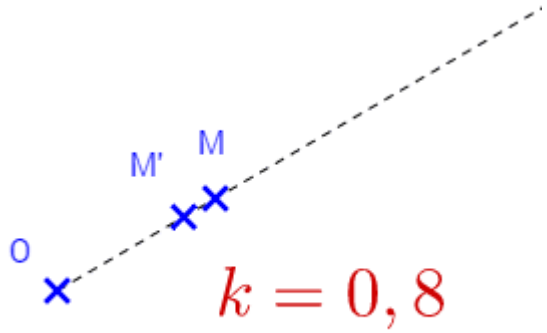
L'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k positif est le point M' tel que :

- M' appartient à la demi-droite [OM);
- $OM' = k \times OM$

**Exemples :**

Construire l'image du point M par l'homothétie de rapport k = 2,5 puis k = 0,8.



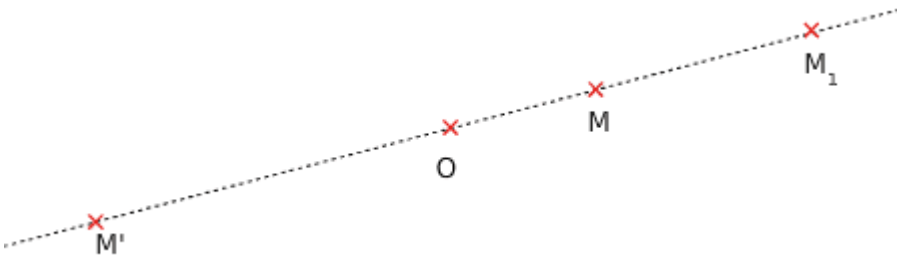




**Remarque :**

Dans le cas où $k = 1$, les images sont confondues avec les points de départs.

Dans le cas où $k<0$, par exemple $k = -2,5$, on construit l'image $M_1$ de M

par l'homothétie de centre O et de rapport 2 puis on construit le symétrique M' de $M_1$ par rapport à O.




## 3. Image d'un segment

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Propriété :

On considère A,B et O trois points du plan et k un nombre positif.

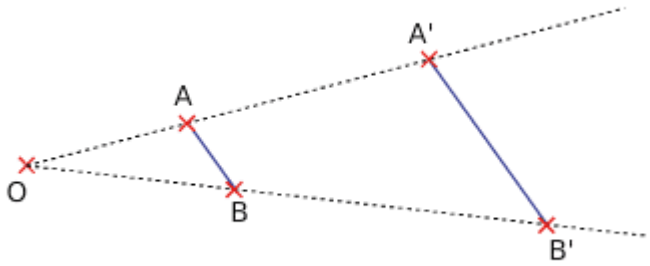
Si les points A' et B' sont les images respectives des points A et B

par l'homothétie de centre O et de rapport k

alors :

- $A'B' = k \times AB$
- $(AB)//(A'B')$

**Démonstration :**




Par définition de l'homothétie de centre O et de rapport k, nous avons :

$OA' = k \times OA$ et $OB' = k \times OB$ donc $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$

Ainsi en utilisant la réciproque du théorème de Thalès, nous en déduisons

que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

Ensuite, nous pouvons appliquer la partie directe du théorème de Thalès.

On sait que : $A \in (OA'), B \in (OB'), (AB)//(A'B')$.

donc nous avons les égalités suivantes :

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k$ ainsi $A'B'=k\times AB$ .

## 4. Les propriétés des homothéties

Propriété :

L'homothétie conserve l'alignement, les milieux et la mesure des angles.

Propriété :

Dans une homothétie de rapport k positif :

- les longueurs sont multipliées par k;
- les aires sont multipliées par $k^2$.

Propriété :

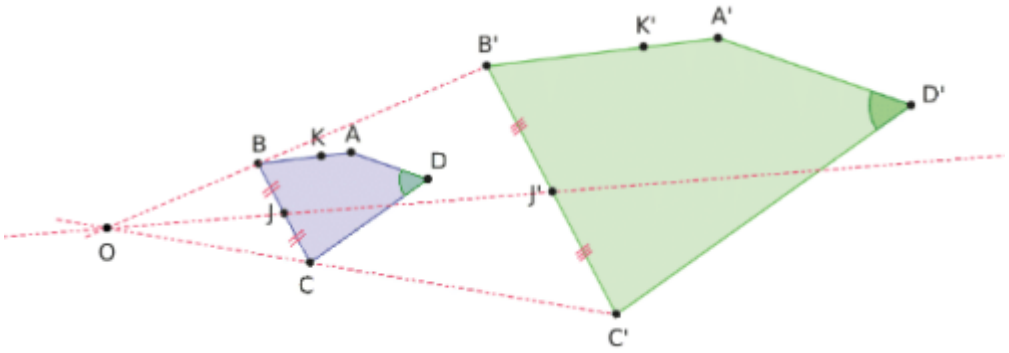
On considère la figure $F_2$ qui est l'image de la figure $F_1$ par une homothétie de centre O et de rapport k.

- Si $k>1$ alors $F_2$ est un agrandissement de $F_1$ par cette homothétie;
- Si $0<k<1$ alors $F_2$ est une réduction de $F_1$ par cette homothétie.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

**Exemple :**

Le quadrilatère A'B'C'D' est l'image du quadrilatère ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2{,}1$ .




- Les points A,B,K sont alignés donc leurs images respectives A',B',K' sont alignées;
- Le point J est le milieu de [BC] donc son image J' est le milieu du segment [B'C'];
- L'angle $\widehat{A'D'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{ADC}$ , ils ont donc la même mesure;
- Les longueurs sont multipliées par 2,1 ainsi $B'C' = 2{,}1 \times BC$ ;
- Les aires sont multipliées par $2{,}1^2 = 4{,}41$ ainsi $Aire_{A'B'C'D'} = 4{,}41 \times Aire_{ABCD}$.