Devoir Mathématiques N^o 9 (1 heure)

Exercice 1 :

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

   On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :
   - F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ » ;
   - F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ » ;
   - F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$ » ;
   - D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

   a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
   Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

   b) Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut.

   c) Calculer la probabilité de l'évènement $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}$.

   d) En déduire la probabilité de l'évènement $\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}$.

   e) Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

Exercice 2 :

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la premiére panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0{,}2}$.
2. À quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0{,}4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins deux robots qui n'aient pas eu de panne au cours des deux premiéres années.