Devoir Mathématiques N^o 3 (2 heures)

Exercice 1 (4 points) :

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $\ln(x+4)+\ln(x+1)=\ln(x+9)$

(E_2) : $\ln(x^2-8)\leq \ln x+\ln 2$

(E_3) : $(2x-3)\ln(x+1)>0$

(E_4) : $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

Exercice 2 (4 points) :

Etudier les limites aux bornes de l'intervalle I

$f_1(x)=(\ln x)^4\,;\quad I=\mathbb{R}_+^\star.$

$f_2(x)=\dfrac{1}{\ln x}\,;\quad I=]1;+\infty[.$

$f_3(x)=\ln(\ln x)\,;\quad I=]1;+\infty[.$

$f_4(x)=\dfrac{\ln(1+3x)}{x}\,;\quad I=\mathbb{R}_+^\star.$

Exercice 3 (1 point) :

Déterminer la primitive sur l'intervalle donné

$f_1(x)=\dfrac{7}{2x-3}+\dfrac{1}{(2x-3)^3}\,;\quad I=]-\infty;\dfrac{3}{2}[.$

Exercice 4 (4 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1; & \text{si } x>0\\ 1; & \text{si } x=0\end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour f ?
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a) Etudier la dérivabilité de f en 0.
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$.
3. Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Determiner l'équation de D tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 5 (7 points) :

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\,;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;+\infty[$.
   On note α cette solution.

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée, en fonction de x, par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

   a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;+\infty[$.

   b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

   c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?