Devoir Mathématiques N^o 4 (2 heures)

Exercice 1 : (4 points)

Etudier les limites suivantes à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ en 0.

$f_2(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+4}$ en $+\infty$.

$f_3(x) = x\ln(\cos^2 x + 2)$ en $+\infty$.

$f_4(x) = e^{(x^3)} - e^{(x^2)}$ en $+\infty$.

Exercice 2 : (3 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

$(E_1)\ :\ 2e^{3x} - 4e^{2x} - 6e^x \geq 0.$

$(E_2)\ :\ x^{\sqrt{2}} > x^2.$

Exercice 3 : (1,5 points)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{xe^{(x^2)}}{e^{(x^2)}+3}$ sur $I = \mathbb{R}$.

$f_2(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 4 : (pour les non spécialistes) (2 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etablir que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?
3. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 5 : (spécialistes) (2 points)

1. Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le reste da la division de n^2 par 8.
2. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{Z}$ des équations suivantes :
   a)
   $$(n+4)^2 - 4 \equiv 0 \quad (8)$$
   b)
   $$(3n^2 + 2n + 1)^2 - 19 = 0 \quad (8)$$

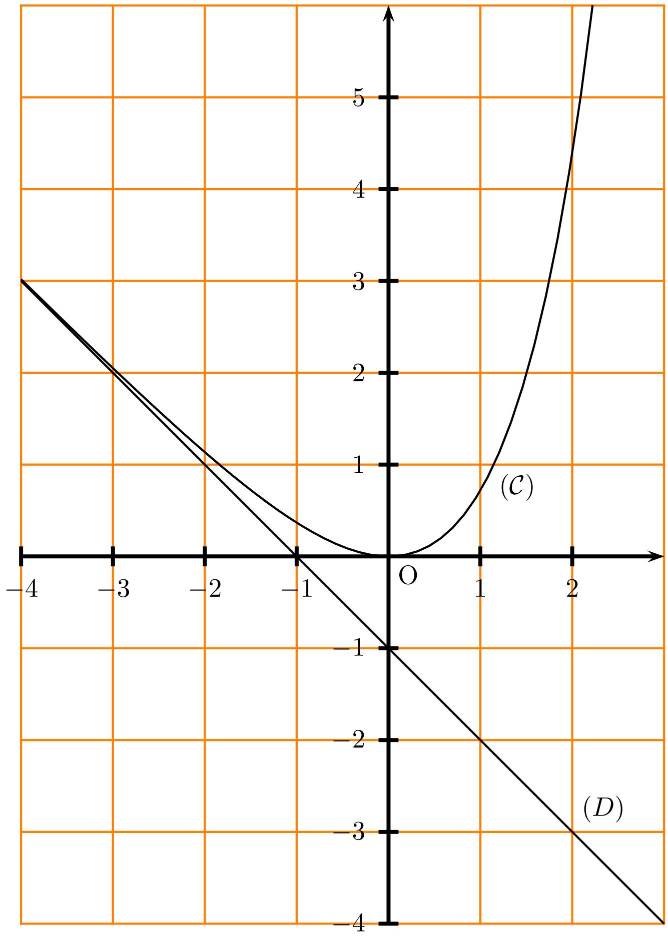
Exercice 6 : (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. On a représenté ci-joint la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer ci-joint, de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.



Exercice 7 : (7,5 points)

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les solutions de l'équation

$$E_a :\ x^a = a^x.$$

I - Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_{e}.
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.
   a) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   b) Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   c) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_{e}.

II - Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   b) Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
   d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Unité : 2 cm).
3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :
   (P_1) : si $a \in]0\ ;\ 1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;
   (P_2) : si $a \in]1\ ;\ \mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ \mathrm{e}[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.