Devoir Mathématiques N^o 10 (2 heures)

Exercice 1 : (3 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 5^x \, dx$

2. $J = \int_2^3 \frac{3x}{1-x^2} \, dx$

Exercice 2 : (6 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 &= 4 \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
   a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3 : (7 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de u_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

4. a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est donnée en annexe.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b) Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par O. Préciser une équation de cette tangente.

3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la région plane délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe $(\mathrm{O}x)$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$.
   On note V une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \pi [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x.$$

   a) Montrer qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto x^4 \ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$.

   b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $V = \dfrac{\pi}{125}\left(2 - \dfrac{37}{\mathrm{e}^5}\right)$.