Devoir Mathématiques N^o 7 (2 heures)

Exercice 1 : (3 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 2^x 3^{x+1}\, dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\, dx$

Exercice 2 : (4 points)

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^n\, dx$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante.
2. Montrer que (I_n) est convergente. On note ℓ la limite de (I_n).
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^3$$

4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 3 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.
   b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$F(x) = [\ln(x+3)]^2.$$

   a) Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer I_n.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 4 : ______________________________ **(6 points)**

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B

1. La courbe représentative de f est tracée sur le document donné en annexe. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.