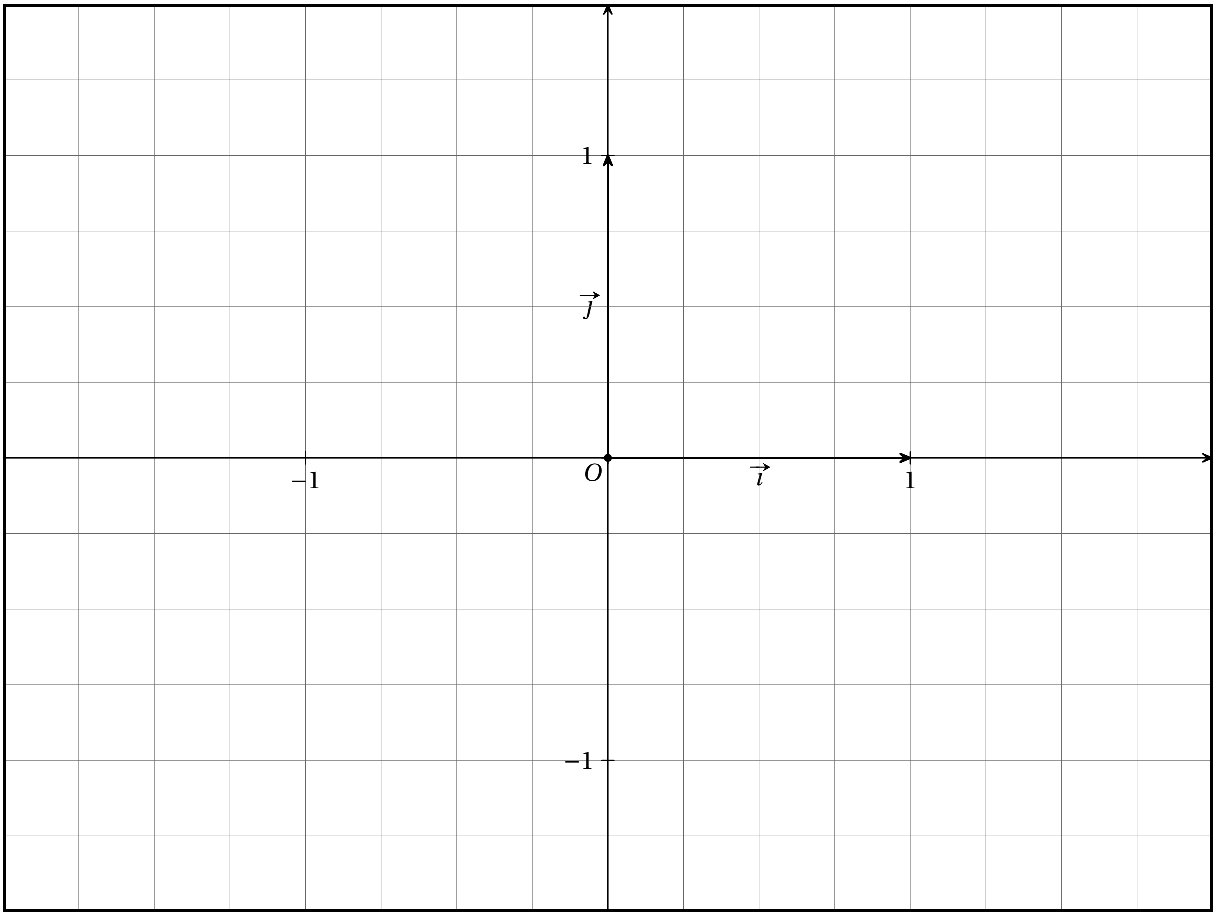
Devoir Mathématiques N^o 8 (1,5 heure)

Exercice 1 : (11 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).
Soit A le point d'affixe $z_A = \mathrm{i}$ et B le point d'affixe $z_B = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
   a) Déterminer une écriture complexe de r.
   b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   c) Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.
   d) Placer les points A, B et C.
2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
   a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Placer le point D.
   b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
   a) Déterminer une écriture complexe de h.
   b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.
4. a) Calculer le rapport $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
   b) En déduire la nature du triangle CDE.



Exercice 2 : (6 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$

   soit une solution f_0 de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.
3. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 3 : (4 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n - 2$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
