Devoir Mathématiques N^o 6 (1 heure)

Exercice 1 : 4 points

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad : \qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. Démontrer que si f est solution de (E) si et seulement si la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') \quad : \quad y' = 2y + 8$.
2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\mathrm{A}(\ln 2\ ;\ 0)$? Si oui la préciser.

Exercice 2 : 5 points

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.
   a) Etudiez les variations de g et en déduire son signe.
   b) Justifier alors le domaine de définition de f.
2. a) Calculez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interprétez graphiquement les résultats obtenus.
   b) Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.
   c) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Etudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et de T.
