# Lycée Albert CAMUS

**BAC BLANC**

**16/03/2011**

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

## SERIE : S

## PROGRAMME OBLIGATOIRE

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Ce sujet comporte 5 pages numérotées.**

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée*

*L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.*

*Le candidat doit traiter les quatre exercices.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**EXERCICE 1 (5 points)**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.
Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar).

**Partie A**

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

| | Train | Avion | Autocar | Total |
|---|---|---|---|---|
| Femme | 468 | 196 | 56 | 720 |
| Homme | 150 | 266 | 64 | 480 |
| Total | 618 | 462 | 120 | 1 200 |

On interroge au hasard un employé de cette entreprise (on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).

On note : F l'évènement : « l'employé est une femme » ;
T l'évènement : « l'employé choisit le train ».

1. Calculer les probabilités $p(F)$, $p(T)$, puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train. Donner les résultats sous forme décimale.

2. Expliquer ce que représente l'évènement $F \cap T$, puis calculer sa probabilité.
   Les évènements $T$ et $F$ sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train.
   Calculer la probabilité que cet employé soit une femme (on donnera le résultat arrondi au millième).

**Partie B**

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- la formule n° 1 : voyage en 1$^{e}$ classe plus hôtel pour un coût de 150 € ;
- la formule n° 2 : voyage en 2$^{e}$ classe plus hôtel pour un coût de 100 €.

40 % des employés inscrits choisissent la formule n$^{o}$ 1.

Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30 €.
Quelle que soit la formule choisie, 80 % des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.
On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note :

- U l'évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n$^{o}$ 1 » ;
- D l' évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n$^{o}$ 2 » ;
- E l' évènement : « l'employé inscrit choisit l'excursion facultative ».

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.

2. Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n$^{o}$ 2 et l'excursion facultative est égale à $0,48$.

3. Soit C le coût total du voyage (excursion comprise).
   a. Déterminer les différentes valeurs possibles prises par C.
   b. Déterminer la loi de probabilité de C.
   c. Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

**EXERCICE 2 (5 points)**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I = ]0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en 0.

2. Montrer que $f(x) = 1 + 2\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ et en déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

3. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]0,+\infty[$.
   Montrer que $f'(x) = \dfrac{2-\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$ et dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $]0,+\infty[$.

4. En déduire que si $x \in [1,2]$ alors $f(x) \in [1,2]$.

**Partie B**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. A l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées à $10^{-3}$ près des termes de $u_1$ à $u_{10}$.

2. En utilisant la partie A :
   a) Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1 \le u_n \le 2$.
   b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ et en déduire qu'elle converge.

3. *Dans cette question, toute recherche correcte même non aboutie, sera valorisée.*

On considère la fonction $g$ définie sur $]0,+\infty[$ $g(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - x$.

On admet que la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 3 (5 points)**

Pour chacune des 5 questions de ce QCM, une seule des 4 propositions est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3i$, $-3-i$ et $2,08+1,98i$. Le triangle ABC est :
   (a) Isocèle et non rectangle
   (b) Non isocèle et rectangle
   (c) Isocèle et rectangle
   (d) Non isocèle et non rectangle
2. A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe $z'$ défini par $z' = \frac{z-4i}{z+2}$.
   L'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que $z'$ est un réel est :
   (a) Un cercle
   (b) Une droite
   (c) Un cercle privé d'un point
   (d) Une droite privée d'un point

3. Soit $f$ l'application du plan qui à tout point M d'affixe $z$ fait correspondre le point M' d'affixe
   $$z' = -iz - 2i.$$
   (a) $f$ est une homothétie
   (b) Le point d'affixe $-1-2i$ est un antécédent du point d'affixe $i$
   (c) $f$ est la rotation de centre le point d'affixe $-1-i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
   (d) $f$ est la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

4. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe $z$ vérifiant $|z-1+i| = |z+1+2i|$.
   Soient les points A, B et C d'affixes respectives $1-i$, $-1+2i$ et $-1-2i$.

   (a) C est un point de (F)
   (b) (F) est la médiatrice du segment $[AB]$
   (c) (F) est la médiatrice du segment $[AC]$
   (d) (F) est le cercle de diamètre $[AB]$

5. $\theta$ étant un nombre réel quelconque, le nombre complexe $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$ est égal à :

   (a) 0
   (b) 1
   (c) $\cos^2(\theta)$
   (d) $\frac{e^{-2i\theta}}{2}$

**EXERCICE 4 (5 points)**

On considère l'équation différentielle $(E) : y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions définies sur $]0;+\infty[$, de cette équation.

1. a) Démontrer que la fonction $u$ définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de $(E)$.

   b) Démontrer qu'une fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ est solution de $(E)$ si et seulement si, la fonction $g - u$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y - y' = 0$.

   c) En déduire toutes les solutions définies sur $]0;+\infty[$ de l'équation $(E)$.

2. Pour tout $k$ réel non nul, on considère la fonction $f_k$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f_k(x) = \dfrac{kx+1}{x}e^x$.

a) Déterminer selon les valeurs de $k$, la limite de $f_k$ en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de $f_k$ en 0.

c) Prouver que la dérivée de $f_k$ est définie par $f_k'(x) = \left(kx^2 + x - 1\right)\dfrac{e^x}{x^2}$.

d) Déterminer selon les valeurs de $k$, le nombre de solutions de l'équation $f_k'(x) = 0$.

e) On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes des fonctions $f_1$, $f_{-1}$, $f_{-0,25}$ et $f_{-0,15}$.
Attribuer à chaque fonction sa courbe : les réponses devront être justifiées.