BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

6 mai 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 3 heures
Coefficient : 9

Ce sujet comporte 3 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 3

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les trois exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et C$(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$ puis les longueurs AB et AC.
   b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.
   c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient $\mathcal{P}_1$, et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
   Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et de rayon $r = 3$.
   a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

   Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   b) Étudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
   c) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

Exercice 2 — 5 points

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\text{e}} (\ln x)^n\,dx$$

1. a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1;\text{e}[$ et pour tout entier naturel n, on a

   $$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$

   b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

   $$I_{n+1} = \text{e} - (n+1)I_n$$

   c) En déduire I_2 et I_3 en fonction de e.
3. a) Démontrer que pour tout n non nul, $I_n \geq 0$
   b) Démontrer que pour tout n non nul, $(n+1)I_n \leq \text{e}$
   c) En déduire la limite de I_n
   d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$. En déduire la limite de nI_n.

Exercice 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+\mathrm{i}$, $3+2\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

   a) Calculer les affixes des points $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C}' = f(\mathrm{C})$.

   b) En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.

   c) Placer les points A, B et C puis construire le point $\mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$.

2. a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

   b) Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe
   $z'' = (1+\mathrm{i})\overline{z} - 1 + 3\mathrm{i}$.

3. a) Soit M_0 le point d'affixe 2 - 4 i.
   Determiner l'affixe du point $\mathrm{M}_0'' = g\left(\mathrm{M}_0\right)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0''}$ sont orthogonaux.

   b) On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.
   Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}M''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x+3y=-2$.

   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

   d) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}M''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.