Mathématiques Bac Blanc TS du mercredi 7 mars 2012 (4 heures)

<u>Chaque exercice sera rédigé sur une copie différente</u>

Les calculatrices sont autorisées (mais aucun formulaire personnel).
La qualité de la rédaction, la clarté de la copie et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : *sur 4 points*
Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :
• « À quel niveau est votre bureau ? »
• « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »
Voici les réponses :
• 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2^{e} niveau et 100 vont au 3^{e} niveau.
• Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^{e} niveau, les autres vont au 1er niveau.
On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :
– N_1 : « La personne va au premier niveau. »
– N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
– N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
– E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2.

a. Montrer que la probabilité que la personne aille au 2^{e} niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.

b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2^{e} niveau.

3. Soit *n* un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais *n* personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

a) Justifier que la probabilité de l'événement « au moins une personne va au 2^{e} niveau » est égale à :
$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

b) Déterminer le plus petit entier *n* strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2^{e} niveau » soit supérieure ou égale à 0,998.

Exercice 2 : *sur 6 points*

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) $y'+y=e^{-x}$

1. Montrer que la fonction *u* définie sur l'ensemble des nombres réels R par $u(x)=xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle (E_0) : $y'+y=0$. Résoudre l'équation différentielle (E_0).

3. Soit *v* une fonction définie et dérivable sur R. Montrer que la fonction *v* est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer l'unique solution *g* de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble R des nombres réels par $f_k(x)=(x+k)e^{-x}$ où *k* est un nombre réel donné.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1-k$.

2. On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y=e^{-x}$.

3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- la courbe Γ d'équation $y=e^{-x}$;
- la courbe C_k d'équation $y=(x+k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel *k* donné.

a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel *k* correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4. Montrer que la fonction F_k définie par $F_k(x)=k+1-(x+k+1)e^{-x}$ est la primitive de f_k qui s'annule en 0.

Exercice 3 : sur 5 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$
   a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.
   c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = \ln(u_n)$
   a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.
   b. Restitution organisée de connaissances :

      On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

      Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ en posant $X = \ln(1+x)$
   c. En déduire $\lim\limits_{n\to +\infty} v_n$
   d. Justifier alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 : *sur 5 points* **Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

2) On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C

a. Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.

b. Sur une figure, placer les points A, B et C en prenant 2 cm pour unité.

c. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

3) Soit D l'image de C par la rotation de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation de vecteur $2\vec{v}$.

a. Placer les points D et E sur la figure.

b. Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_E = \dfrac{1}{2}\left[1 + i(4 - \sqrt{3})\right]$.

c. Montrer que OE = BE = $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

4) Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 4 : *sur 5 points* **Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité.**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectives

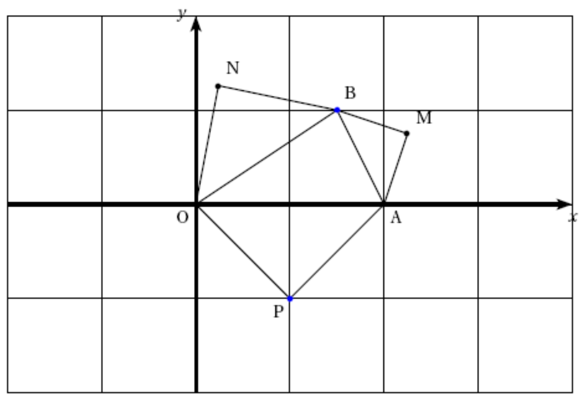
$z_A = 2$ et $z_B = \dfrac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.

On note S_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note S_2 la similitude de centre O qui transforme B en N.

On considère la transformation $r = S_2 \circ S_1$.



Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1) **A l'aide des transformations.**

a. Donner l'angle et le rapport de S_1 et de S_2.

b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation *r*.

c. Justifier que *r* est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d. Quelle est l'image du point O par *r* ?

e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2) **En utilisant les nombres complexes.**

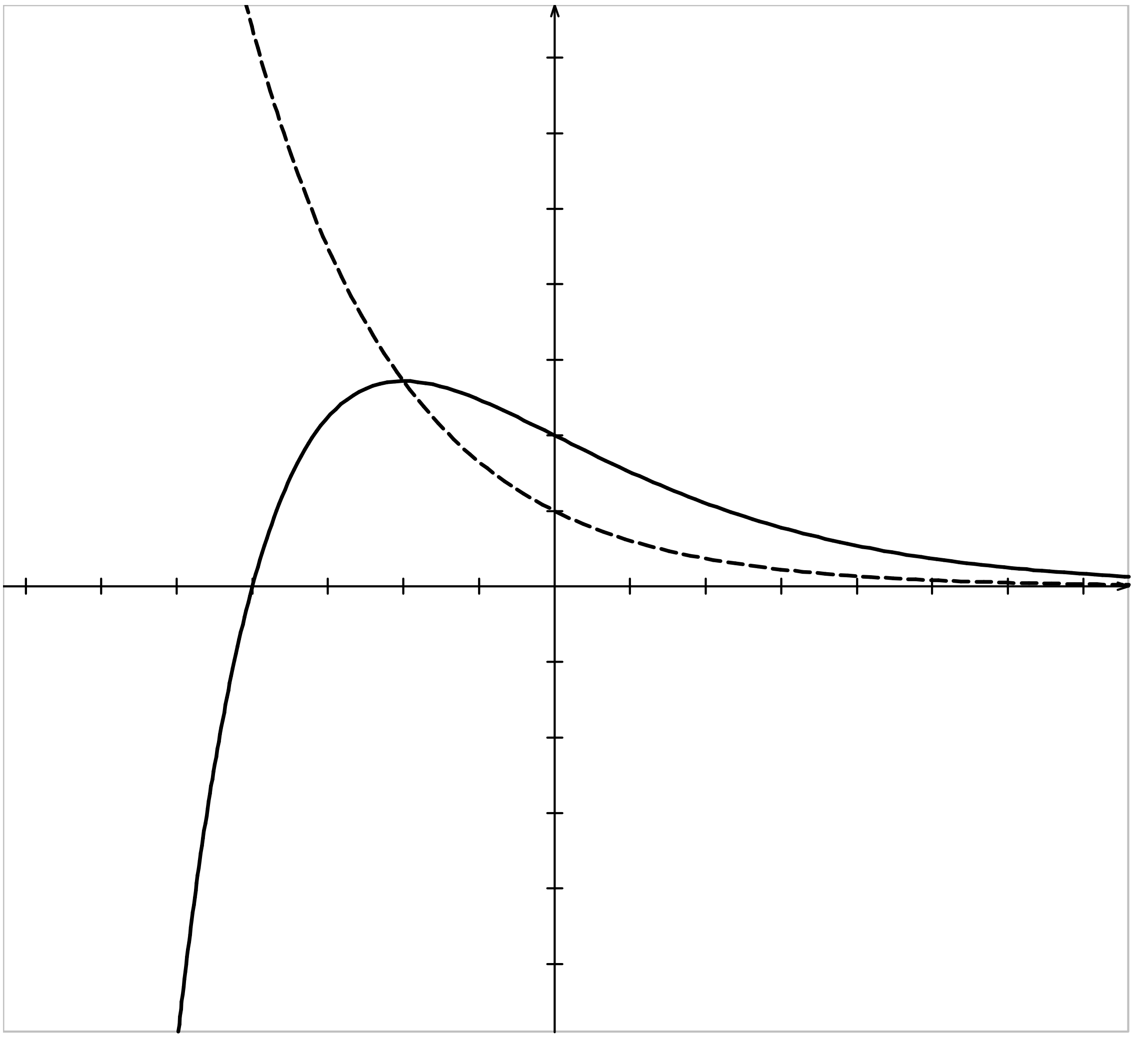
a. Donner les écritures complexes de S_1 et de S_2. On utilisera les résultats de la question 1a.

b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

c. Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

NOM : **Classe**

Bac blanc – Mathématiques – Feuille annexe à rendre avec l’exercice 2

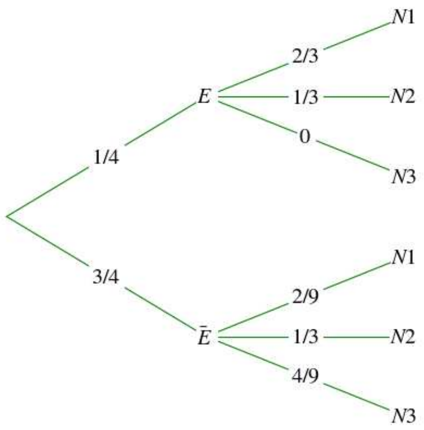


Corrigé de l'exercice 1

1. On sait que 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau. donc $p(\overline{E})=\frac{225}{300}=\frac{3}{4}$, $p_{\overline{E}}(N_1)=\frac{50}{225}=\frac{2}{9}$, $p_{\overline{E}}(N_2)=\frac{75}{225}=\frac{1}{3}$, $p_{\overline{E}}(N_3)=\frac{100}{225}=\frac{4}{9}$

Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau donc on a : $p(E)=\frac{75}{300}=\frac{1}{4}$, $p_E(N_1)=\frac{2}{3}$, $p_E(N_2)=\frac{1}{3}$

on peut donc traduire l'énoncé à l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous et le compléter par déductions: 0,75



2.a. L'évènement « la personne va au deuxième niveau par l'escalier est $E\cap N_2$

$p(E\cap N_2)=p(E)\times P_E(N_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ 0,25

La probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est bien égale à $\frac{1}{12}$.

b. D'après l'arbre de probabilité et la formule des probabilités totales , on a :

$$p(N_1)=p(E\cap N_1)+p(\overline{E}\cap N_1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$$ 0.25

$$p(N_2)=p(E\cap N_2)+p(\overline{E}\cap N_2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ 0.25

$$p(N_3)=p(\overline{E}\cap N_3)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$$ 0.25

$P(N_1)=p(N_2)=p(N_3)$ Les évènements N_1, N_2 et N_3 sont donc équiprobables.

c. La probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau est $p_{N2}(E)$ 0,75

$$p_{N2}(E)=\frac{p(E\cap N_2)}{p(N_2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

3. Soit *n* un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais *n* personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

a) 0.75

L a probabilité qu'une personne aille au 1er ou au 3è niveau est $p(N_1\cup N_3)=p(N1)+p(N_3)=\frac{2}{3}$

L'événement contraire de l'évènement « au moins une personne va au 2e niveau » est « n personnes vont au premier ou au troisième niveau » de probabilité $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *car l'énoncé précise l'indépendance des réponses*

La probabilité cherchée est donc égale à : $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) On cherche le plus petit entier n strictement positif tel que $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0,998$ 0,75

cette inéquation est équivalente à

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,002$ ce qui équivaut en appliquant la focntion ln à $\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \ln 0,002$

soit encore $n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(0,002) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0,002)}{\ln(\frac{2}{3})}$ or $\dfrac{\ln(0,002)}{\ln(\frac{2}{3})} \approx 15,3$

Le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2e niveau » soit supérieure ou égale à 0,998 est donc 16

Corrigé de l'exercice 2

Partie A :

1. On calcule la dérivée de u en utilisant la formule du produit : $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.

On a donc : $u'(x)+u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$. 0.5

***u* est donc est une solution de l'équation différentielle (E)**

2. On sait d'après le cours que les solutions (sur R) de l'équation différentielle *y'=ay* sont les fonctions définies sur R par $x \mapsto Ke^{ax}$, avec $K \in$ R. On en déduit : 0.5

Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions h_K définies sur R par $h_K(x) = Ke^{-x}$, où $K \in$ R

3. *v* est une solution de l'équation différentielle (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in R, v'(x)+v(x) = e^{-x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in R, v'(x)+v(x) = u'(x)+u(x)$ d'après Q1

$\Leftrightarrow \forall x \in R, v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in R, (v-u)'(x)+(v-u)(x) = 0$ 0.75

$\Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0)

4. *v* est une solution de l'équation différentielle (E) ⇔ *v −u* est une solution de l'équation différentielle (E_0) d'après Q.3. ⇔ *v – u* est de la forme $x \mapsto Ke^{-x}$ avec K réel, d'après Q. 2. ⇔ $\forall x \in R, v(x) = u(x)+Ke^{-x}$ 0.5

Par suite :

Les solutions de l'équation (*E*) sont les fonctions v_K définies sur R par $v_K(x) = Ke^{-x} + xe^{-x} = (x+K)e^{-x}$, où $K \in$ R

5. Soit *g* une solution de (*E*) : d'après Q.4, il existe un réel *K* tel que : $\forall x \in R, g(x) = (x+K)e^{-x}$ 0.25

Comme : *g* (0) = 2,Ke^0 = 2 d'où *K* = 2, on en déduit :

L'unique solution *g* de l'équation (*E*) vérifiant *g* (0)= 2 est la fonction *g* définie sur R par : $g(x) = (x+2)e^{-x}$.

Partie B :

1. On calcule la dérivée de f_k en utilisant la formule du produit : $f'_k(x) = e^{-x} - (x+k)e^{-x} = (1-x-k)e^{-x}$

Puisque $e^X > 0$ pour tout réel *X*, le signe de $f'k(x)$ est celui de 1−*x* −*k*.

Comme 1−*x* −*k* >0 ⇔ *x* <1−*k*, *fk* est croissante sur]−∞; 1−*k*] et décroissante sur [1−*k* ; +∞[:

La fonction f_k admet donc un maximum pour *x* = 1−*k*. 1

2. M_k a pour coordonnées (1−*k*, f_k (1−*k*)), soit (1−*k*,$e^{-(1-k)}$). Puisque $y_{M_k} = e^{-x_{M_k}}$, on a prouvé :

Le point de la courbe C_k d'abscisse 1−*k* appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$. 0.5

3. a. La fonction *H* : $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur R, ce qui permet d'identifier immédiatement les deux courbes. (*Voir figure)* 0.5

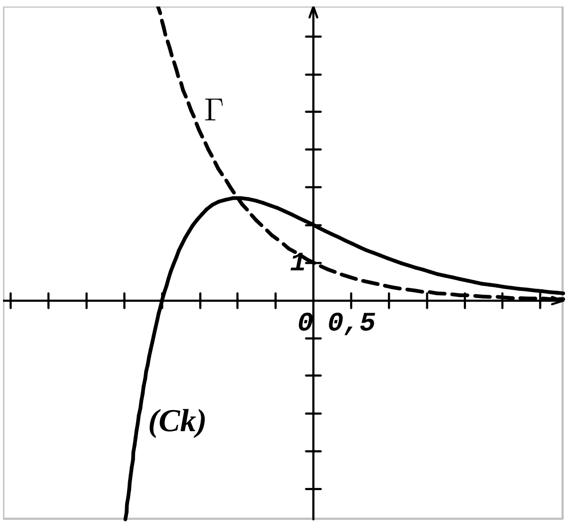
b. • On sait que la courbe Γ passe par le point de coordonnées (0 ;1) donc **une graduation sur l'axe des ordonnées correspond à une unité.**

D'autre part, $f_k(0) = k$ et C_k coupe l'axe des ordonnées à 2 graduations donc à 2 unités. On en déduit que ***k* = 2.**

Enfin, on sait que C_k et Γ se coupent au point d'abscisse 1 – k, donc, comme k = 2, au point d'abscisse – 1. Or, cela correspond à deux graduations sur l'axe des abscisses. **Sur l'axe des abscisses, une graduation correspond à 0.5**. 1

4. En utilisant la formule du produit et sachant que $k+1$ est une constante, on calcule la dérivée de F_k :

$F'_k(x) = -e^{-x} + (x+k+1)e^{-x} = (-1+x+k+1)e^{-x} = (x+k)e^{-x} = f_k(x)$ ce qui prouve que F_k est une primitive de f_k. De plus : $F_k(0) = k+1-(k+1) = 0$ On a bien démontré que F_k est la primitive de f_k qui s'annule en 0. 0.5



Corrigé du n° 3

1. a. On calcule la dérivée de la fonction *f* en utilisant $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Comme $x \in [0\,;+\infty[$, $1+x$ est strictement positif et $f'(x)$ est du signe de *x*. D'où le tableau de variations : 0.5

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	0 $\qquad$ $+$
variations de *f*	0 $\nearrow$

f(0) = 0 – ln(1) = 0

On en déduit que pour tout *x* positif ou nul, *f(x)* est positif ou nul ; autrement dit : $x - \ln(1+x) \geq 0$ c'est-à-dire $\ln(1+x) \leq x$ 0.5

b. $\ln(u_n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

En appliquant le résultat de la question précédente avec $x = \dfrac{1}{n}$, ce qui est possible car $\dfrac{1}{n}$ est positif, on obtient : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$ d'où en multipliant par *n* qui est strictement positif, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leq n \times \dfrac{1}{n} = 1$ c'est-à-dire $\ln(u_n) \leq 1$ 0.5

c. On vient de démontrer que, pour tout naturel *n* non nul, $\ln(u_n) \leq 1$

d'où on déduit : $u_n \leq e$ pour tout entier $n > 0$.

Or, une suite qui tend vers + ∞ finit par dépasser n'importe quel réel, pour *n* assez grand. Donc la suite (u_n) ne peut pas avoir pour limite + ∞. 0.5

2. a. $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 0.5

On pose $x = \dfrac{1}{n}$ d'où $n = \dfrac{1}{x}$ et $v_n = \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

b. On pose $X = \ln(1+x)$ d'où $1+x = e^X$ et $x = e^X - 1$.

Quand *x* tend vers 0, $1+x$ tend vers 1 et X tend vers ln(1) = 0.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{X}{e^X - 1}$$ 1

On sait que $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X} = 1$ donc, par inverse, $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{X}{e^X-1} = 1$ d'où on déduit, par composée : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

c. Quand n tend vers + ∞, $x = \frac{1}{n}$ tend vers 0 et $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc, par composée, vu qu'on a démontré en 2. a. que $v_n = \frac{\ln(1+x)}{x}$, on a $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$ 0.75

d. $v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{v_n}$

On sait que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$ donc, par composée, $\lim_{n \to +\infty} u_n = e$: la suite (u_n) converge vers e. 0.75

0.75

Exercice 4 : *sur 5 points* **Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.**

1) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 16 = -4$ donc $z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ 0.75

$S = \left\{\sqrt{3} - i , \sqrt{3} + i\right\}$

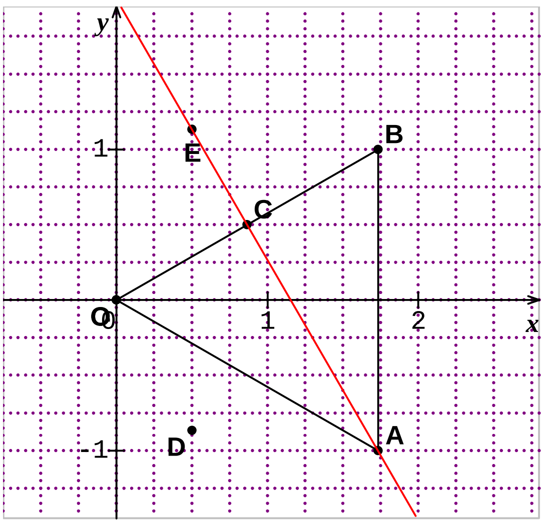
2) On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C

a) $|z_A| = \sqrt{4} = 2$ alors $z_A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ 0.5

$|z_B| = 2$ alors $z_B = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z_B = \overline{z_A} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

C étant le milieu de [OB] on a $z_C = \frac{1}{2}z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$

b)



1

c) $|z_A| = 2$ et $|z_B| = 2$ $\Leftrightarrow$ $OA = OB$

$\frac{z_B}{z_A} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\Leftrightarrow$ $Arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$

Le triangle OAB est isocèle en O avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ donc OAB est équilatéral. 0.5

3) b) D est l'image de C par la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on a donc $z_D = z_C \times e^{-i\frac{\pi}{2}}$

E est l'image de D par la translation de vecteur $2\vec{v}$, on a donc $z_E = z_D + 2i$ $\Leftrightarrow$ $z_E = z_C e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2i$

$\Leftrightarrow$ $z_E = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2i$ $\Leftrightarrow$ $z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}} + 2i$ $\Leftrightarrow$ $z_E = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i$ $\Leftrightarrow$ $z_E = \frac{1}{2}\left(1 + i(4 - \sqrt{3})\right)$ 0.5

c) OE = $|z_E| = \frac{1}{2}\sqrt{1+(4-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+16-8\sqrt{3}+3} = \frac{1}{2}\sqrt{20-8\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{4(5-2\sqrt{3})} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$

$z_E - z_B = \frac{1}{2}\left(1+i(4-\sqrt{3})\right) - \sqrt{3} - i = \frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

BE = $|z_E - z_B| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt{3} + 3 + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$. 0.75

4) d'après la question précédente, on a OE = BE donc E est un point de la médiatrice de [OB]

De même AO = AB car le triangle OAB est équilatéral donc A est un point de la médiatrice de [OB] 1

Et C est le milieu de [OB]. On a donc A, E et C alignés.

Exercice 4 : *sur 5 points* **Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité.**

1) **A l'aide des transformations.**

a. S_1 est la similitude directe de centre A qui transforme M en B donc le rapport de la similitude est égal à $\frac{AB}{AM} = \sqrt{2}$ et l'angle de la similitude est $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4}$ (2π) car le triangle AMB est rectangle isocèle direct.

0,75

S_2 est la similitude directe de centre O qui transforme B en N donc le rapport de la similitude est égal à $\frac{ON}{OB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et l'angle de la similitude est $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\pi}{4}$ car le triangle BNO est rectangle isocèle direct.

b. M $\xrightarrow{S_1} B \xrightarrow{S_2} N$ donc r(M) = N

I $\xrightarrow{S_1} P \xrightarrow{S_2} I$ donc r(I) = I car le triangle OAP est rectangle isocèle en P

0, 5

c. r est la composée de deux similitudes directes donc c'est une similitude directe de rapport le produit des rapports de S_1 et S_2 soit 1 et d'angle la somme des angles de S_1 et S_2 soit $\frac{\pi}{2}$. Le centre de r est l'unique point invariant donc I d'après la question précédente.

On en déduit que r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,75

d. L'image de O par r est le point P car dans le triangle isocèle rectangle OAP, I milieu de [OA] donc (PI) hauteur et médiane relative à l'hypoténuse [OA] donc PI = IO= IA.

0,5

e. On sait que l'image de M par la rotation r est N et l'image de O par r est P donc la droite (PN) est l'image par
r de la droite (OM). On en déduit que l'angle formé par les deux droites est l'angle de la rotation à savoir

$\frac{\pi}{2}$, donc (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

0,75

2) **En utilisant les nombres complexes.**

a. D'après la question 1) a. on sait que S_1 est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

S_1 a pour écriture complexe : z' = az + b où a = $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et b $\in \mathbb{C}$. De plus A est invariant par S_1 donc

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z_A + b \Leftrightarrow 2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 2 - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2i$.

S_1 a pour écriture complexe $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z - 2i$.

De même on démontre que S_2 a pour écriture complexe : $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$. **0,75**

b. Le point M est l'antécédent de B par S_1, on a donc : $z_B=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}z_M-2i$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}z_M-2i \Leftrightarrow \frac{3}{2}+3i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z_M \Leftrightarrow z_M=\frac{\frac{3}{2}+3i}{1+i}$$

$$\Leftrightarrow z_M=\frac{\left(\frac{3}{2}+3i\right)(1-i)}{2} \Leftrightarrow z_M=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}i.$$

Le point N est l'image de B par S_2, on a donc :

$$z_N=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_B \Leftrightarrow z_N=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+i\right) \Leftrightarrow z_N=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i\,.$$ **0,5**

c. Le point P a pour affixe $z_P = 1 - i$

$$\frac{z_N-z_P}{z_M-z_O}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i-1+i}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}i}=\frac{-3+9i}{9+3i}=\frac{-1+3i}{3+i}=\frac{(-1+3i)(3-i)}{10}=i$$

Or $Arg\left(\frac{z_N-z_P}{z_M-z_O}\right)=\left(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{PN}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

On en déduit que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires **0,5**