BACCALAURÉAT BLANC 2013

– Série S –

Mathématiques (spécialité)

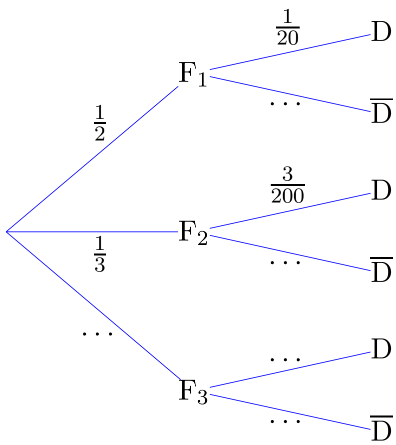
CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) On traduit les données de l'énoncé et on représente la situation par un arbre pondéré.

$$P(F_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(F_2) = \frac{1}{3},$$

$$P_{F_1}(D) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \qquad P_{F_2}(D) = \frac{1,5}{100} = \frac{3}{200}, \qquad P(D) = \frac{3,5}{100} = \frac{7}{200}.$$



(b) La probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut est égale à

$$P(F_1 \cap D) = P(F_1) \times P_{F_1}(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{40} = \frac{5}{200}.$$

(c) De la même façon la probabilité de l'événement $F_2 \cap D$ est égale à

$$P(F_2 \cap D) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{200} = \frac{1}{200}.$$

(d) On calcule $P(F_3 \cap D)$ avec la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(F_1 \cap D) + P(F_2 \cap D) + P(F_3 \cap D),$$

soit ici

$$\frac{7}{200} = \frac{5}{200} + \frac{1}{200} + P(F_3 \cap D),$$

donc

$$P(F_3 \cap D) = \frac{1}{200}.$$

(e) On a

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{F}_1) - \mathrm{P}(\mathrm{F}_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Puis

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}_3}(\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D})}{\mathrm{P}(\mathrm{F}_3)} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{200} = \frac{3}{100}.$$

2. (a) Le tirage des 6 chaussettes est assimilé à 6 tirages indépendants avec remise, ce qui correspond à la répétition de 6 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ayant pour « succès » l'obtention d'une chaussette défectueuse.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de chaussettes défectueuses sur un tirage de 6 chaussettes. X compte donc le nombre de succès, ainsi elle suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p = \mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0{,}035$.
Lorsque X suit $\mathscr{B}(n,p)$ on sait que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

soit ici

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \binom{6}{2} 0{,}035^2 (1 - 0{,}035)^4 = 15 \times 0{,}035^2 \times 0{,}965^4 \approx 0{,}015\ 934 \approx 0{,}016.$$

(b) La probabilité qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) &= \binom{6}{0} 0{,}035^0 (1 - 0{,}035)^6 + \binom{6}{1} 0{,}035^1 (1 - 0{,}035)^5 \\ &\approx 0{,}807\ 54 + 0{,}175\ 734 \approx 0{,}983.\end{aligned}$$

Exercice 2

Partie A : restitution organisée de connaissance

On pose $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout x réel,

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On étudie le signe de cette dérivée :

$$\varphi'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0,$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. On en déduit le tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$\varphi(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1.$$

Ainsi, pour tout x réel, $\varphi(x) > 0$ soit $\mathrm{e}^x > x$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc, d'après le prérequis,

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Partie B

1. Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
2. On a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. On calcule la dérivée de f :
$$f'(x) = 1e^{x-1} + x \times 1 \times e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$
4. Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x + 1 \geqslant 0$ équivaut à $x \geqslant -1$. Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, +\infty[$ et $f(-1) = -1e^{-1-1} + 1 = 1 - e^{-2}$. On peut dresser le tableau de variation suivant.

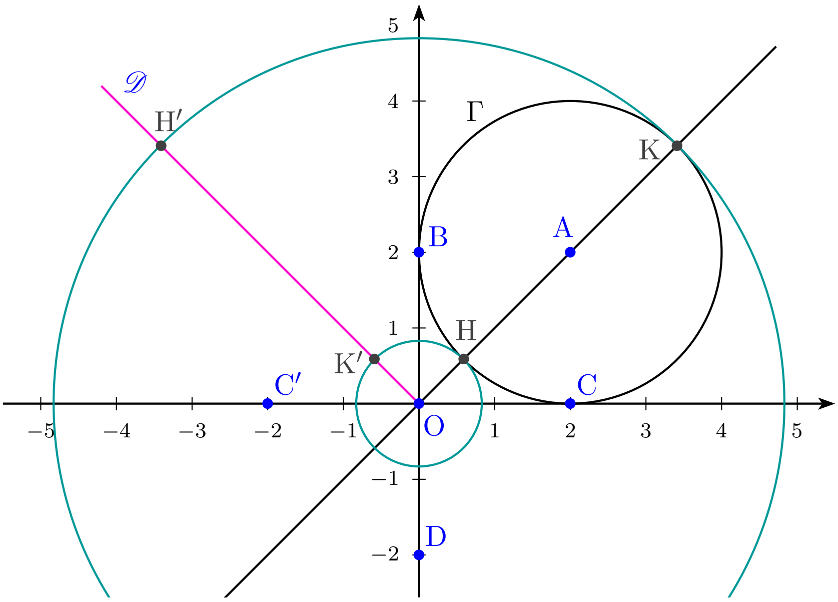
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. La tangente $\mathscr{T}_a$ a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, c'est-à-dire
$$y = (a+1)e^{a-1}(x - a) + ae^{a-1} + 1.$$
2. Soit $a > 0$, alors
$$\begin{aligned} O(0,0) \in \mathscr{T}_a &\iff 0 = (a+1)e^{a-1}(-a) + ae^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = e^{a-1}(-a^2 - \cancel{a} + \cancel{a}) + 1 \\ &\iff 1 - a^2e^{a-1} = 0. \end{aligned}$$
3.
   - 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - 1 = 0$.
   - Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,
   $$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2e^{x-1} = (-2x - x^2)e^{x-1} = -x(2+x)e^{x-1}.$$
   Sur $]0, +\infty[$, $x > 0$, donc $x + 2 > 0$ et $-x < 0$; par ailleurs $e^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
   Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ et si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$. Comme $g(1) = 0$, on conclut que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.
4. La seule tangente passant par l'origine du repère est donc la droite $\mathscr{T}_1$ qui a pour équation $y = 2(x - 1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$.

Exercice 3

1. On a $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$.
   (a) On place les points sur une figure que l'on complète au fur et à mesure.



   (b) $OA = |z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   O, H, A et K sont alignés dans cet ordre donc

$$OH = OA - AH = 2\sqrt{2} - 2 \quad \text{et} \quad OK = OA + AK = 2\sqrt{2} + 2.$$

   (c) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires de même sens, donc

$$\arg(z_H) = \arg(z_K) = \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi).$$

   Alors

$$z_K = |z_K|e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_H = |z_H|e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

À tout point point M d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. (a) Soit B′ et C′ les images respectives de B et C par f. On a

$$z_{B'} = \frac{-4}{2i} = \frac{-4i}{-2} = 2i \quad \text{et} \quad z_{C'} = \frac{-4}{2} = -2.$$

   L'image de B et le point B lui même et l'image de C est le point C′ d'affixe -2.
   (b) M, d'affixe $z \neq 0$, invariant par f se traduit par

$$z = \frac{-4}{z} \iff z^2 = -4 \iff z = 2i \text{ ou } z = -2i.$$

   Les points invariants par f sont B et le point D d'affixe $-2i$.

3. (a) Pour tout point M, d'affixe z, distinct de O,

$$z' = \frac{-4}{z} \implies zz' = -4 \implies |z|\times|z'| = 4 \implies \mathrm{OM}\times\mathrm{OM}' = 4.$$

(b) Pour tout point M, d'affixe z, distinct de O,

$$z' = \frac{-4}{z} \implies \arg(z') = \arg(-4) - \arg(z) = \pi - \arg(z) \quad (2\pi).$$

4. (a) D'après le 3.a,

$$\mathrm{OK}' = \frac{4}{\mathrm{OK}} = \frac{4}{2\sqrt{2}+2} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2\sqrt{2}-2 = \mathrm{OH},$$
$$\mathrm{OH}' = \frac{4}{\mathrm{OH}} = \frac{4}{2\sqrt{2}-2} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2}+2 = \mathrm{OK}.$$

(b) D'après le 3.b,

$$\arg(z_{\mathrm{K}'}) = \pi - \arg(z_{\mathrm{K}}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi),$$
$$\arg(z_{\mathrm{H}'}) = \pi - \arg(z_{\mathrm{H}}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi).$$

Comme $|z_{\mathrm{K}'}| = \mathrm{OK}'$ et $|z_{\mathrm{H}'}| = \mathrm{OH}'$, on déduit les formes exponentielles :

$$z_{\mathrm{K}'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{H}'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

(c) $z_{\mathrm{K}'}$ et $z_{\mathrm{H}'}$ ont pour argument $\frac{3\pi}{4}$, donc K′ et H′ sont sur la demi-droite $\mathscr{D}$ (constituée des points d'argument $\frac{3\pi}{4}$). De plus OK′ = OH donc K′ appartient aussi au cercle de centre O et rayon OH. De même OH′ = OK, donc H′ appartient au cercle de centre O et rayon OK. D'où la construction des deux points.

Exercice 4

Partie A

La suite u_n est définie par $u_n = \left(3+2\sqrt{2}\right)^n$.

1. On calcule $u_0 = \left(3+2\sqrt{2}\right)^0 = 1$ donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, $u_1 = 3+2\sqrt{2}$ donc $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$, enfin $u_2 = \left(3+2\sqrt{2}\right)^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 4\times 2 = 17 + 12\sqrt{2}$ donc $a_2 = 17$ et $b_2 = 12$.
2. On démontre par récurrence que, pour tout n entier non nul, on peut écrire

$$u_n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad \text{avec} \quad a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}. \qquad (\mathrm{P}_n)$$

- Initialisation. On a $u_1 = 3+2\sqrt{2}$ et $3a_0 + 4b_0 = 3 = a_1$ et $2a_0 + 3b_0 = 2 = b_1$.

- Hérédité. Supposons que la propriété soit vraie pour un n particulier non nul, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n} \times \left(3+2\sqrt{2}\right) = u_n \left(3+2\sqrt{2}\right) \\ &= \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 3a_n + 2\sqrt{2}a_n + 3\sqrt{2}b_n + 4b_n \\ &= 3a_n + 4b_n + \sqrt{2}\left(2a_n + 3b_n\right), \end{aligned}$$

  donc

$$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} \quad \text{avec} \quad a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n,$$

  ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion. On a prouvé que, pour tout $n \geqslant 1$, (P_n) est vraie.

3. Le problème de l'algorithme proposé est que la nouvelle valeur de la variable b sera calculée avec la nouvelle valeur de a et non avec l'ancienne. Il faut donc utiliser une variable tampon, appelons-là par exemple c, pour stocker provisoirement la nouvelle valeur de a, le temps de calculer la valeur de b. Ce qui donne l'algorithme suivant.

```
Entrée : n entier naturel non nul
Traitement :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour j allant de 1 à n
    c prend la valeur 3a + 4b
    b prend la valeur 2a + 3b
    a prend la valeur c
Fin pour
Sortie : afficher a et b
```

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \times \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Partie B

1. On vérifie à la main que $\mathrm{PQ} = \mathrm{QP} = \mathrm{I}$:

$$\mathrm{PQ} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4+4 & 4\sqrt{2}-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I},$$

$$\mathrm{QP} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4+4 & -4+4 \\ -4+4 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}.$$

2. On calcule BP à la main :

$$\mathrm{BP} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2}+8 & -6\sqrt{2}+8 \\ 4\sqrt{2}+6 & -4\sqrt{2}+6 \end{pmatrix},$$

puis QBP :

$$\begin{aligned}
\mathrm{QBP} &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6\sqrt{2}+8 & -6\sqrt{2}+8 \\ 4\sqrt{2}+6 & -4\sqrt{2}+6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12+8\sqrt{2}+8\sqrt{2}+12 & -12+8\sqrt{2}-8\sqrt{2}+12 \\ -12-8\sqrt{2}+8\sqrt{2}+12 & 12-8\sqrt{2}-8\sqrt{2}+12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathrm{D}.
\end{aligned}$$

On vérifie ainsi que QBP est bien la matrice diagonale D annoncée.

3. On a $\mathrm{QBP} = \mathrm{D}$ donc $\mathrm{P(QBP)Q} = \mathrm{PDQ}$ soit $\mathrm{(PQ)B(PQ)} = \mathrm{PDQ}$ et, comme $\mathrm{PQ} = \mathrm{I}$, on obtient $\mathrm{B} = \mathrm{PDQ}$.

4. On a $\mathrm{B}^2 = \mathrm{(PDQ)(PDQ)} = \mathrm{PD(QP)DQ} = \mathrm{PDIDQ} = \mathrm{PDDQ} = \mathrm{PD^2Q}$.
On montre ensuite, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{B}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{Q}$.
   - Initialisation. $\mathrm{B}^0 = \mathrm{I}$ et $\mathrm{PD^0Q} = \mathrm{PIQ} = \mathrm{PQ} = \mathrm{I}$, la propriété est vérifiée au rang 0.
   - Hérédité. Si $\mathrm{B}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{Q}$, pour un entier n, alors

   $$\mathrm{B}^{n+1} = \mathrm{B}^n\mathrm{B} = (\mathrm{PD}^n\mathrm{Q})(\mathrm{PDQ}) = \mathrm{PD}^n\mathrm{DQ} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{Q},$$

   donc la propriété est héréditaire.
   - Conclusion. Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

5. Les matrices A (de la partie A) et B (de la partie B) sont égales donc, par une récurrence évidente, on a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \mathrm{B}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \mathrm{B}^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\mathrm{PD}^n = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\alpha^n & -2\sqrt{2}\beta^n \\ 2\alpha^n & 2\beta^n \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{PD}^n\mathrm{Q} &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\alpha^n & -2\sqrt{2}\beta^n \\ 2\alpha^n & 2\beta^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4\alpha^n + 4\beta^n & 4\sqrt{2}\alpha^n - 4\sqrt{2}\beta^n \\ 2\sqrt{2}\alpha^n + 2\sqrt{2}\beta^n & 4\alpha^n + 4\beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha^n - \beta^n) \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(\alpha^n - \beta^n) & \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \mathrm{B}^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \mathrm{PD}^n\mathrm{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(\alpha^n - \beta^n) \end{pmatrix}.$$