BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

16 février 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 4 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 4

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x+1)$$

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leqslant x \leqslant 4$ et $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

   Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   a) sur les variations de la fonction f ?
   b) sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b) Étudier les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.
   c) Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   d) Les résultats aux questions 3.a et 3.c confirment-ils les conjectures émises à la question 2 ?
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0{,}1\,;0{,}2]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.
   a) Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question 3.c dans la fenêtre de votre calculatrice ?
   b) À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.
5. Soit F la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

   $$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1{,}1x^2 - 2{,}2x + 2{,}2(x+1)\ln(x+1)$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$.

Exercice 2 — 8 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.
On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}$$

1. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f.

Partie C

1. On a étudié dans une réserve fermée l'évolution d'une population de gazelles Thompson. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4}$$

   a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 gazelles, c'est- à-dire $g(0) = 1$.

   c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 gazelles pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'un parc naturel donné, les lions empêchent une telle croissance en tuant une certaine quantité de gazelles. On note $u(t)$ le nombre de gazelles vivantes au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \text{pour tout réel } t \geqslant 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel} t \geqslant 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3 **5 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$(E) : 4z^2 - 12z + 153 = 0$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6\text{i}$, $z_B = \frac{3}{2} - 6\text{i}$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}\text{i}$, $z_P = 3 + 2\text{i}$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}\text{i}$.

    a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.

    b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

    c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

    d) Placer les points P, Q, R et S.

3. a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

    b) Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
    En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.

    c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 4 **3 points**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

    b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. a) Calculer les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

    b) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.