BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

16 février 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Ce sujet comporte 4 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 4

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ vérifiant la relation

$$(E) : a^2 - 250\,507 = b^2$$

1. Soit X un entier naturel.

   a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

   b) Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

   c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;b)$.
3. On suppose que le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation (E).

   a) Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

   b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\,;b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

On donne ci-dessous la liste des nombres premiers inférieurs à 1000.

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 2 — 8 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}$$

1. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f.

Partie C

1. On a étudié dans une réserve fermée l'évolution d'une population de gazelles Thompson. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4}$$

   a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
   b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 gazelles, c'est- à-dire $g(0) = 1$.
   c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 gazelles pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'un parc naturel donné, les lions empêchent une telle croissance en tuant une certaine quantité de gazelles. On note $u(t)$ le nombre de gazelles vivantes au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \text{pour tout réel } t \geqslant 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \geqslant 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.
   c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3 — 5 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$(E) : 4z^2 - 12z + 153 = 0$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6\text{i}$, $z_B = \frac{3}{2} - 6\text{i}$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}\text{i}$, $z_P = 3 + 2\text{i}$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}\text{i}$.

   a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.

   b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

   c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   d) Placer les points P, Q, R et S.

3. a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

   b) Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.

   c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 4 — 3 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. a) Calculer les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.