

# Terminales S - Baccalauréat Blanc

## Enseignement de Spécialité

– lundi 13 février 2012 –

Coefficient 9

Les sacs doivent être déposés au pied du tableau.

La calculatrice est autorisée.

Le sujet comporte 4 pages et deux pages d'annexes (pages 5 et 6).

Le candidat s'assurera que son sujet est complet.

### Exercice 1

5 points

1. On considère l'équation (E) :  $11x - 7y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs  $(u ; v)$  tels que  $11u - 7v = 1$ . Trouver un tel couple.
  - b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).
  - c. Résoudre l'équation (E).
  - d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la droite  $D$  d'équation cartésienne  $11x - 7y - 5 = 0$ . On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $M(x ; y)$  du plan tels que  $0 \leq x \leq 50$  et  $0 \leq y \leq 50$ .  
Déterminer le nombre de points de la droite  $D$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{C}$  et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2. On considère l'équation (F) :  $11x^2 - 7y^2 = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Démontrer que si le couple  $(x ; y)$  est solution de (F), alors  $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ .
  - b. Soient  $x$  et  $y$  des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, $x$ est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $x^2$ est congru à					

Modulo 5, $y$ est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de  $x^2$  et de  $2y^2$  par 5 ?

- c. En déduire que si le couple  $(x ; y)$  est solution de (F), alors  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5, alors le couple  $(x ; y)$  n'est pas solution de (F).  
Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

## Exercice 2

6 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

### Partie A :

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction  $u$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = xe^{-x}$  est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E') :  $y' + y = 0$ . Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit  $v$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $v$  est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction  $v - u$  est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution  $g$  de l'équation différentielle (E) telle que  $g(0) = 2$ .

### Partie B :

On considère la fonction  $f_k$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}$$

où  $k$  est un nombre réel donné.

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction  $f_k$  admet un maximum en  $x = 1 - k$ .
  2. On note  $M_k$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_k$  d'abscisse  $1 - k$ . Montrer que le point  $M_k$  appartient à la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = e^{-x}$ .
  3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
    - la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = e^{-x}$  ;
    - la courbe  $\mathcal{C}_k$  d'équation  $y = (x + k)e^{-x}$  pour un certain nombre réel  $k$  donné.
- a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe (à rendre avec la copie).
  - b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel  $k$  correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

### Exercice 3

4 points

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $] - 1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

On considère la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 & = 4 \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$$

1. On a tracé, en annexe 1, la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .
  - a. Sur le graphique en annexe 1, placer sur l'axe des abscisses,  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Faire apparaître les traits de construction.
  - b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.
  - a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que  $u_n \geq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b. Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ . En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} \leq u_n$ .
  - c. Déduire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

## Exercice 4

5 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

### **Partie I :**

On dispose d'un dé cubique  $A$  parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement  $C$  : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».  
Démontrer que la probabilité de l'évènement  $C$  est égale à  $\frac{7}{18}$ .
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

### **Partie II :**

On dispose d'un second dé cubique  $B$  équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé  $B$  ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé  $B$  et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé  $A$  et on note la couleur de la face obtenue.

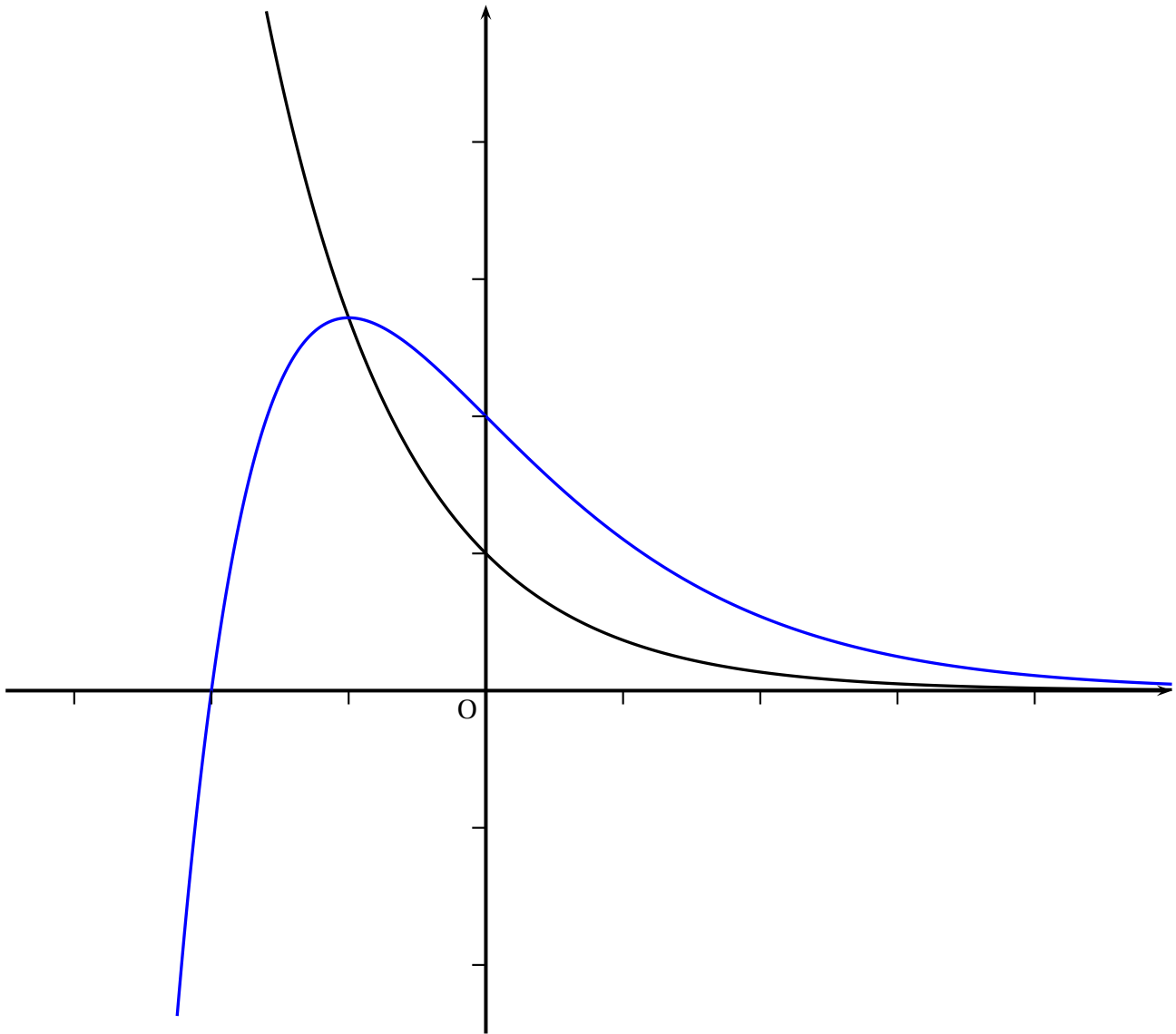
1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.  
**b.** Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à  $\frac{4}{9}$ .
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

## Exercice 2

Annexe

Nom, Prénom et classe : .....

(à rendre avec la copie)



### Exercice 3

(À rendre avec la copie)

