Terminales S - Baccalauréat Blanc
Enseignement Obligatoire

– lundi 13 février 2012 –

Exercice 1

5 points

Partie A :

1. **a.** Pour montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ, nous allons calculer les distances OP et OQ, où O est l'origine du repère, donc d'affixe 0. Nous avons donc :

$\text{OP} = |p-0| = |p| = \left|-\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1.$

$\text{OQ}= |q-0| = |q| = |\overline{p}| = |p| = 1$. En effet, les modules d'un complexe et de son conjugué sont égaux.

Puisque les distances de P et Q au centre de Γ sont égales au rayon du cercle, on en déduit que les points P et Q sont effectivement sur Γ.

b. Pour placer les points P et Q, on commence par tracer le cercle Γ, et on repère les deux points du cercle qui ont pour abscisse $-\frac{1}{2}$, celui des deux points dont l'ordonnée est positive est P, l'autre point est Q. (ici, on n'a pas inclus la figure, pour gagner une page sur ce corrigé)

2. **a.** Rappelons que O est le point d'affixe 0 et que K est le point d'affixe -1.

$$\begin{aligned}
\text{M, d'affixe } z \text{ est dans l'ensemble } \mathscr{D} &\iff |z| = |z+1| \\
&\iff |z-0| = |z-(-1)| \\
&\iff \text{OM} = \text{KM} \\
&\iff \text{M est équidistant de O et K.} \\
&\iff \text{M est sur la médiatrice de [OK].}
\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{D}$ est donc la médiatrice du segment [OK].

b. On sait déjà que les points P et Q sont à une distance égale à 1 de O. Déterminons leur distance à K :

$\text{PK} = |p-(-1)| = |p+1| = |-q| = |-1|\times|q| = |q| = 1$. On a en effet $p+1=-q$.

$\text{QK} = |q-(-1)| = \left|\overline{p-(-1)}\right| = |p-(-1)| = 1.$

On a bien P et Q équidistants de O et de K, donc ils sont bien sur la droite $\mathscr{D}$.

Finalement, on a établi que P et Q sont tous deux sur le cercle Γ et sur $\mathscr{D}$, ils sont donc les deux points d'intersection de ces deux ensembles.

Partie B :

1. **a.** Puisque O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, cela signifie que les segments [OA], [OB] et [OC] sont des rayons de ce cercle, et donc leurs longueurs sont égales. On a donc OA = OB = OC, ce qui se traduit, avec les modules par $|a-0| = |b-0| = |c-0|$ et donc par $|a| = |b| = |c|$.

Puisque les trois complexes sont supposés non nuls, c'est en particulier vrai pour a et donc $|a| \neq 0$, on peut donc diviser l'égalité précédente par $|a|$, ce qui donne : $\frac{|b|}{|a|} = \frac{|c|}{|a|} = \frac{|a|}{|a|}$.

Comme le quotient de deux modules est égal au module du quotient, on en déduit donc : $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.

b. Puisque O est le centre de gravité du triangle ABC, c'est donc l'isobarycentre de ces trois points, et donc les affixes de O, A, B et C vérifient $a+b+c=0$.

c. De l'égalité précédente, on déduit que $c=-(b+a)$ et donc que $\frac{c}{a} = -\left(\frac{b}{a}+1\right)$, et donc si ces complexes sont égaux, c'est a fortiori vrai pour leurs modules, donc on a $\left|\frac{c}{a}\right| = \left|-\left(\frac{b}{a}+1\right)\right| = |-1|\times\left|\frac{b}{a}+1\right| = \left|\frac{b}{a}+1\right|$. Finalement, comme $\frac{c}{a}$ et $\frac{b}{a}$ ont le même module, on arrive à la conclusion demandée : $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a}+1\right|$

d. le nombre $\frac{b}{a}$ a un module égal à 1, c'est donc l'affixe d'un point de Γ, et il est aussi tel que son module est égal au module de ce nombre plus 1, donc c'est l'affixe d'un point de $\mathscr{D}$. Puisque les ensembles $\mathscr{D}$ et Γ n'ont que deux points d'intersection, on en déduit que le point dont l'affixe est $\frac{b}{a}$ est l'un de ces deux points, soit P ou Q, et donc son affixe est égale à p ou q.

Finalement, on a bien $\frac{b}{a} = p$ ou $\frac{b}{a} = q$.

2. a. On a $q-1=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\frac{3}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$. On notera que cette dernière forme n'est pas la forme exponentielle (le nombre réel en facteur est négatif), mais ce n'est pas grave.

   Par ailleurs, on a $p-1=\overline{q-1}=\overline{-\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}}=-\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{6}}$

   Finalement, on a : $\frac{q-1}{p-1}=\frac{-\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}}{-\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{6}}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{6}}}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b. On a, d'après la supposition faite en début de question : $\frac{q-1}{p-1}=\frac{\frac{c}{a}-1}{\frac{b}{a}-1}$, et donc, en multipliant au numérateur et au dénominateur de cette fraction par a, on a bien $\frac{q-1}{p-1}=\frac{c-a}{b-a}$.

   c. Le quotient $\frac{c-a}{b-a}$ est donc un nombre complexe de module 1, donc on peut en déduire que le quotient $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=1$, et donc les distances AB et AC sont égales : le triangle est donc isocèle en A.

   Comme par ailleurs, un argument de $\frac{c-a}{b-a}$ est $\frac{\pi}{3}$, on en déduit que l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ admet pour mesure $\frac{\pi}{3}$, donc le triangle isocèle en A est en fait équilatéral.

Exercice 2

6 points

Partie A :

1. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$. Comme $u'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$, on en déduit : $u'(x)+u(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$:
   u est donc est une solution de l'équation différentielle (E)
2. On sait d'après le cours que les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sont les fonctions h_K définies sur $\mathbb{R}$ par $h_K(x)=K\mathrm{e}^{-ax}$, avec $K\in\mathbb{R}$.
   On en déduit que les solutions de l'équation (E') sont les fonctions h_K définies sur $\mathbb{R}$ par $h_K(x)=K\mathrm{e}^{-x}$, où $K\in\mathbb{R}$.
3. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
v \text{ est une solution de l'équation différentielle (E)} &\iff \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)+v(x)=\mathrm{e}^{-x}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)+v(x)=u'(x)+u(x)\ ^{*}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-u'(x)+v(x)-v'(x)=0\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R}\quad (v-u)'(x)+(v-u)(x)=0\\
&\iff v-u \text{ est une solution de l'équation différentielle (E')}
\end{aligned}$$

   * car u est une solution de l'équation $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$
4. Là encore, raisonnons encore par équivalence :

$$\begin{aligned}
v \text{ est une solution de (E)} &\iff v-u \text{ est une solution de l'équation différentielle (E')} && \text{d'après } \mathbf{3.}\\
&\iff \text{Il existe un réel } K \text{ tel que, pour tout réel } x\ :\ (v-u)(x)=K\mathrm{e}^{-x} && \text{d'après } \mathbf{2.}\\
&\iff \text{Il existe un réel } K \text{ tel que, pour tout réel } x\ :\ v(x)=K\mathrm{e}^{-x}+u(x)
\end{aligned}$$

   On en déduit donc que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions v_K définies sur $\mathbb{R}$ par $v_K(x)=K\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=(x+K)\mathrm{e}^{-x}$, où $K\in\mathbb{R}$
5. Soit g une solution de (E) : d'après **4.**, il existe un réel K tel que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=(K+x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme : $g(0)=2\iff K\mathrm{e}^{0}=2$ et donc on a $K=2$, on en déduit que l'unique solution g de l'équation (E) vérifiant $g(0)=2$ est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B :

1. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par exemple en tant que solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation (E)).
   On a alors : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f_k'(x)=\mathrm{e}^{-x}-f_k(x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}(x+k)=\mathrm{e}^{-x}(1-x-k)$.
   Puisque la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, le signe de $f_k'(x)$ est celui de $1-x-k$.
   Comme $1-x-k\leqslant 0\iff x\geqslant 1-k$, f_k est croissante sur $]-\infty\,;\,1-k]$ et décroissante sur $[1-k\,;\,+\infty[$: La fonction f_k admet donc un maximum pour $x=1-k$.
2. M_k a pour coordonnées $(1-k, f_k(1-k))$, soit $(1-k, \mathrm{e}^{-(1-k)})$. Puisque $y_{M_k}=\mathrm{e}^{-x_{M_k}}$, on a prouvé : Le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1-k$ appartient à la courbe Γ d'équation $y=\mathrm{e}^{-x}$.
3. a. La fonction $H: x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'identifier immédiatement les deux courbes.

b. • $H(0)=1$: L'unité sur l'axe des ordonnées est égale à 2 cm, soit la distance entre deux graduations successives.

• $f_k(0)=k$: comme le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse 0 a pour ordonnée 2, on en déduit : $k=2$

• La résolution de l'équation $f_k(x)=0$ montre que la courbe $\mathscr{C}_k$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-k=-2 \iff k=2$: L'unité sur l'axe des abscisses est aussi égale à 2 cm, soit la distance entre deux graduations successives.

Exercice 3

4 points

1. **a.** Voir à la fin.

   b. Il semble que la suite est décroissante et qu'elle converge vers 1.

2. Nous allons traiter simultanément les points **a.** et **b.** :

a. b. La fonction f est une fraction rationnelle, et elle est donc dérivable sur tout son ensemble de définition, $]-1\,;\,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

Comme $f'(x)$ est le quotient de deux nombres positifs, alors pour tout x, $f'(x)$ est positif.

Puisque la fonction dérivée de f est positive sur $]-1\,;\,+\infty[$, on en déduit que f est donc croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Pour tout n naturel, on pose la propriété $\mathscr{P}_n : 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : $u_0=4\geqslant 1$ et $u_1=3-\dfrac{4}{4+1}=2{,}2$. On a bien $1\leqslant u_1\leqslant u_0$. La propriété est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Supposons que, pour un entier naturel $k\geqslant 0$, que la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie, c'est à dire $1\leqslant u_{k+1}\leqslant u_k$.

Puisque la fonction f est croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$, on applique f à l'inégalité précédente :

$f(1)\leqslant f(u_{k+1})\leqslant f(u_k)$.

Or $f(1)=3-\dfrac{4}{1+1}=3-2=1$ et, par définition de la suite u, $f(u_k)=u_{k+1}$ et $f(u_{k+1})=u_{k+2}$.

On a donc : $1\leqslant u_{k+2}\leqslant u_{k+1}$, c'est à dire que la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

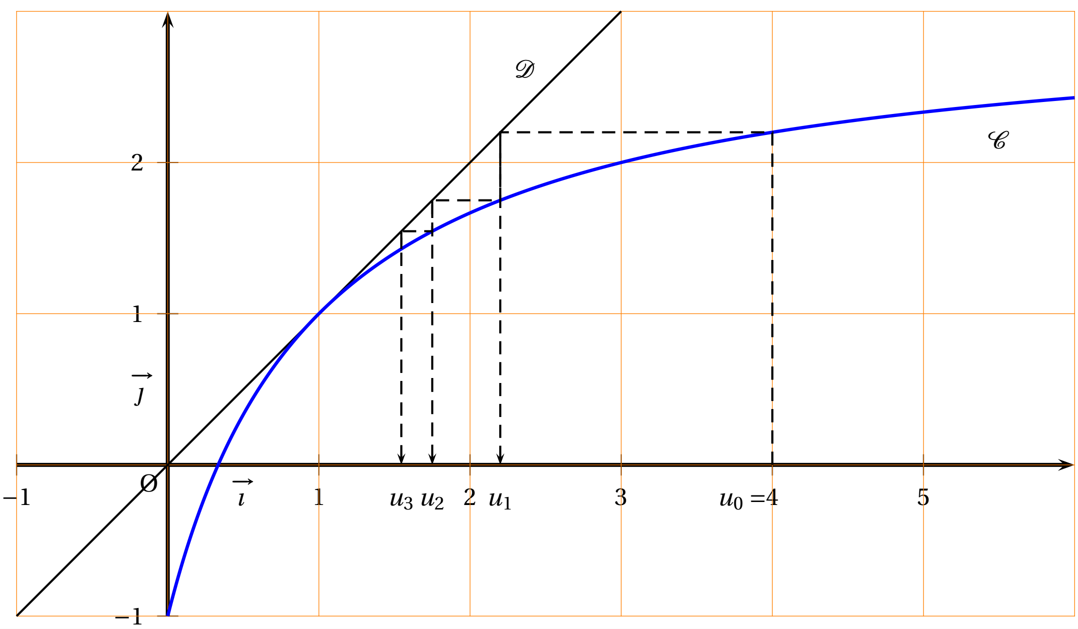
Conclusion : Puisque la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, on a démontré par récurrence que quel que soit le naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$, donc que la suite u est décroissante et minorée par 1.

c. La suite étant décroissante et minorée par 1, elle est donc convergente vers un nombre ℓ supérieur ou égal à 1. La fonction f est continue car dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et elle définit la relation de récurrence de la suite u : $u_{n+1}=f(u_n)$.

On peut donc citer le théorème du point fixe, qui garantit que la limite de la suite est une solution à l'équation $\ell=f(\ell)$.

$$\begin{aligned}
\ell=f(\ell) &\iff \ell=3-\frac{4}{\ell+1}\\
&\iff \ell(\ell+1)=3(\ell+1)-4 \text{ on peut multiplier par } \ell+1 \text{ qui est non nul, car supérieur à 2}\\
&\iff \ell^2+\ell-3\ell-3+4=0\\
&\iff \ell^2-2\ell+1=0\\
&\iff (\ell-1)^2=0\\
&\iff \ell-1=0\\
&\iff \ell=1.
\end{aligned}$$

La suite (u_n) converge donc vers 1.



Exercice 4

5 points

Partie I

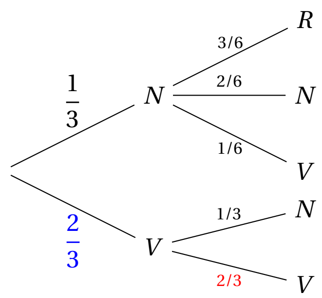
On note V_1, N_1 et R_1 (respectivement V_2, N_2 et R_2) la couleur obtenue au premier (respectivement second) jet.
Les dés A et B étant équilibrés, on est dans une situation où toutes les faces sont équiprobables, et donc les probabilités d'occurrence de chaque couleur sont données par le quotient du nombre de faces portant cette couleur divisé par 6.

1. Probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires : Les deux jets étant indépendants, nous pouvons écrire : $p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$.
   On réutilisera l'indépendance des deux jets par la suite, sans forcément le signaler à chaque fois.
2. Soit l'événement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
   Cet événement est la réunion de trois événements incompatibles (V : « obtenir deux boules vertes », N : « obtenir deux boules noires » et R : « obtenir deux boules rouges »). On en déduit donc la probabilité suivante :
   $p(C) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap N_2) + p(R_1 \cap R_2) = p(V_1) \times p(V_2) + p(N_1) \times p(N_2) + p(R_1) \times p(R_2)$
   $p(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{7}{18}$
3. Calculons la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes (il s'agit ici de l'événement contraire à l'événement de la question précédente). On a donc : $p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, calculons la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes : $V \subset C \Longrightarrow C \cap V = V$.

   On en déduit donc la probabilité conditionnelle suivante : $p_C(V) = \frac{p(C \cap V)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{7}{18}} = \frac{1}{36} \times \frac{36}{14} = \frac{1}{14}$

Partie II

1. **a.** Arbre de probabilités traduisant cette situation :



   b. La probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer est de :

$$p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}$$

2. La probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$:

$$p(V_1 \cap V_2) = p_{V_1}(V_2) \times p(V_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3. La probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer se détermine grâce à la loi des probabilités totales : Les événements N_1 et V_1 forment une partition de l'univers (puisque le premier dé lancé n'a que des faces noires et des faces vertes), et donc on a :

$$p(V_2) = p(N_1 \cap V_2) + p(V_1 \cap V_2) = p_{N_1}(V_2) \times p(V_1) + p_{V_1}(V_2) \times p(V_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$