BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Février 2012

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 5

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les trois exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 5 points

Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f, du plan $(\mathcal{P})$ dans lui-même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\text{i}z}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.
2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\text{O}M' = \frac{\text{O}M}{\text{A}M} \text{ et } \left(\vec{u},\,\overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}},\,\overrightarrow{M\text{O}}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. a) Soit B le point d'affixe $b = -\dfrac{1}{2} + \text{i}$.
   Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].

   b) Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B$'$ image du point B par f.
   Établir que B$'$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.
   Placer le point B$'$ et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ dans le repère.

   c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

   d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
   En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (On laissera apparents les traits de construction.)

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.
   Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.

   a) On pose $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels tels que $(x,\,y) \neq (-1,\,0)$ et $(x,\,y) \neq (0,\,0)$.
   Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

$$\text{Im}\left(z'\right) = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$$

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

   b) À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

Exercice 2 — 4 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f\left(u_n\right) \end{array}\right.$$

1. On a tracé, en annexe 1, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
   a) Sur le graphique en annexe 1, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.
   b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.
   a) Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 — 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}}\right)$.
2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

Exercice 4 — Réservé aux candidats ayant suivi la de spécialité, 5 points

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l' écriture décimale de u_n.
3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

   On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n, 3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.
6. a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 5 — Réservé aux candidats ayant suivi la spécialité, 1 point

Pour chacune des deux affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9.

ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)