

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∞
19 juin 2012

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Les parties B et C sont indépendantes.

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation sur \mathbb{R} .

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse a , qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .
2. Démontrer qu'une tangente à \mathcal{C} en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe \mathcal{C} de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe \mathcal{C} est au-dessus de la droite Δ . Hachurer le domaine \mathcal{D} limité par la courbe \mathcal{C} la droite Δ , la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.
2. On pose $I = \int_0^1 xe^{x-1} dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \frac{1}{e}$.
3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine \mathcal{D} .

EXERCICE 2**4 points****Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm.

On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \quad ; \quad b = -2 - i \quad ; \quad c = -3 + i.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer $\frac{b}{a}$, en déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$

- a. Calculer l'affixe c' du point C' , image de C par f et placer le point C' sur la figure.
 - b. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.
 - c. Justifier que \mathcal{E} contient les points O et C. Tracer \mathcal{E} .
4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On appelle K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note L le milieu de [JK].

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .
2.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1 .
- b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln 2$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***Les cinq questions sont indépendantes.*

- Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.
On choisit, au hasard, un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
- Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.
Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.
- Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} .
- Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
- On considère l'algorithme :

```

A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
    Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
    Fin Si
Fin répéter
Afficher C.

```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.
Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

EXERCICE 4**5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Les quatre questions sont indépendantes.**

- Vérifier que le couple $(4 ; 6)$ est une solution de l'équation

$$(E) \quad 11x - 5y = 14.$$

- b.** Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ vérifiant l'équation (E).
- 2. a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}.$$

- b.** Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.
- 3.** On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.$$

4.

- 5.** On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que  $N \leq \sqrt{A}$ 
    Si  $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$  alors Afficher N et  $\frac{A}{N}$ 
    Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?

ANNEXE 1
Exercice 1
À rendre avec la copie
Courbe \mathcal{C} représentative de f

