# ∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾<br>19 juin 2012

**EXERCICE 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les parties B et C sont indépendantes.*

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

**Partie A : étude de la fonction**

1. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ ?
2. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
3. On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

**Partie B : recherche d'une tangente particulière**

Soit $a$ un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a$, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle $\mathrm{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a$. Donner une équation de $\mathrm{T}_a$.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse $a$ strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si $a$ vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

**Partie C : calcul d'aire**

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Construire sur ce graphique la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\Delta$. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite $\Delta$, la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.
2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

**EXERCICE 2** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm.
On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2\text{i} \quad ; \quad b = -2 - \text{i} \quad ; \quad c = -3 + \text{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer $\dfrac{b}{a}$, en déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ avec $z \neq b$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2\text{i}}{z + 2 + \text{i}}$$

   **a.** Calculer l'affixe $c'$ du point C$'$, image de C par $f$ et placer le point C$'$ sur la figure.

   **b.** Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ d'affixe $z$ avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

   **c.** Justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On appelle J l'image du point A par la rotation $r$ de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   On appelle K l'image du point C par la rotation $r'$ de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note L le milieu de [JK].
   Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ non nul par

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{array}\right.$$

1. Calculer $u_2, u_3$ et $u_4$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ est strictement positif.

   **b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

   **c.** Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?
3. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

   **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme $v_1$.

   **b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.
   **a.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
   **b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 4** **5 points**
**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

*Les cinq questions sont indépendantes.*

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.
   On choisit, au hasard, un élève du lycée.
   Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.
   Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.
3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
   Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à $10^{-3}$.
4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
   On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
   On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
   On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.
   On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
5. On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
                Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

   Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.
   Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

**EXERCICE 4** **5 points**
**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Les quatre questions sont indépendantes.**

1. **a.** Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation

$$\text{(E)} \qquad 11x - 5y = 14.$$

**b.** Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

**2.** **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod 7.$$

**b.** Déterminer le reste de la division euclidienne de $2011^{2012}$ par 7.

**3.** On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i}.$$

**4.**

**5.** On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ⩽ √A
        Si A/N − Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N
        Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?

**ANNEXE 1**
**Exercice 1**
**À rendre avec la copie**

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$