BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.

On appelle R le barycentre des points pondérés (B, −1) et (F, 2).

L'espace est muni du repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

1. a) Démontrer que le point R a pour coordonnées (1, 1, 2).

   b) Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

   c) Quelle est la nature du triangle PQR ?

2. a) Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

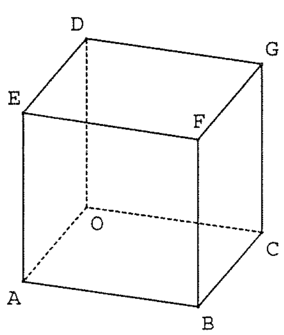
   b) Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).

   a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).

   b) Déterminer les coordonnées du point H.

   c) Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



EXERCICE 2 (4 points)

Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.
Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE.

Pour chaque question, il est compté 1 point si les deux réponses sont exactes, 0,5 point pour une réponse exacte et une absence de réponse et 0 point sinon.

Question A Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les événements : A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».	**Proposition 1** La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.	**Proposition 2** La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.
Question B Soient A, B et C trois événements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que : • A et B sont indépendants • $P(\text{A}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{A}\cup\text{B}) = \frac{3}{4}$; • $P(\text{C}) = \frac{1}{2}$; $P(\text{A}\cap\text{C}) = \frac{1}{10}$.	**Proposition 3** $P(\text{B}) = \frac{7}{12}$.	**Proposition 4** $P(\overline{\text{A}\cup\text{C}}) = \frac{2}{5}$. $\overline{\text{A}\cup\text{C}}$ désigne l'événement contraire de $\text{A}\cup\text{C}$.
Question C Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0,1[$.	**Proposition 5** Si $P(X=1) = 8P(X=0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.	**Proposition 6** Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X=1) = P(X=0)$.
Question D La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}07$ sur $[0\,;+\infty[$. On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $(X \leq t)$ est donnée par : $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ (avec $\lambda = 0{,}07$).	**Proposition 7** La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.	**Proposition 8** Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 (5 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.
On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $\mathrm{M}' = F(\mathrm{M})$ d'affixe z' définie par : $z' = z + \mathrm{i} - \frac{1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \mathrm{i}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b'.

   a) Calculer a' et b'.

   b) Placer les points A, A', B et B'.

   c) Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

   d) En déduire la nature du triangle OBB'.

2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

   a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^2+\mathrm{i}z-1=\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.

   b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

   c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

3. Soit θ un réel.

   a) Démontrer que si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\,\mathrm{i}$.

   b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment [A'C] où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

EXERCICE 4 (7 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=-nx-x\ln x$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

Les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données en annexe, page 6.

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_0(x)=-x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0,+\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x\in\ ]0,+\infty[$, $f_n'(x)=-n-1-\ln x$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n.
2. a) Démontrer que la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   b) Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y=x$.
   c) Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.
3. a) Démontrer que la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.
   b) Démontrer que la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
   c) Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2.

Partie C : Calculs d'aires

Pour tout entier naturel n, on considère le domaine du plan D_n délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équation $x=\mathrm{e}^{-n-1}$ et $x=\mathrm{e}^{-n}$.

On note I_n l'aire en unités d'aires du domaine D_n.

1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe page 6, les domaines D_0, D_1, D_2.
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x$.
   b) En déduire que $I_0=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4\mathrm{e}^2}$.
   c) On admet que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I_0.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 4