

SESSION 2008

MATHÉMATIQUES

SERIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n°99-186 du 16 novembre 1999.

2 feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

-.**

Le candidat doit traiter les quatre exercices

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(0; -2; 3)$, $D(1; 1; -2)$ et le plan \mathcal{P} d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

*Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots **VRAI** ou **FAUX** correspondant à la réponse choisie.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1) Affirmation 1 : les points A , B et C définissent un plan.

2) Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan \mathcal{P} .

3) Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.

4) Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est :
$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

5) Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

6) Affirmation 6 : la distance du point C au plan \mathcal{P} est égale à $4\sqrt{6}$.

7) Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan \mathcal{P} .

8) Affirmation 8 : le point $E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan \mathcal{P} .

Exercice 2 (5 points)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; l'unité graphique est 2cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 2 + 3i, \quad c = 3i, \quad d = -\frac{5}{2} + 3i \quad \text{et} \quad e = -\frac{5}{2}.$$

- 1) Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
- 2) On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.
Démontrer que $OABC$ et $ABDE$ sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.
- 3) **Étude d'une similitude directe transformant $OABC$ en $ABDE$**
 - a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B .
 - b) Démontrer que la similitude s transforme $OABC$ en $ABDE$.
 - c) Quel est l'angle de la similitude s ?
 - d) Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD) . En déduire la position du point Ω .
- 4) **Étude d'une similitude indirecte transformant $OABC$ en $BAED$**
 - a) Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est : $z' = -\frac{3}{2}i\bar{z} + 2 + 3i$ où \bar{z} désigne le conjugué du nombre complexe z .
 - b) Montrer que s' transforme $OABC$ en $BAED$.
 - c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production.

Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I) Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

On note :

- M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'événement : « le personnel interrogé est une femme » ;

1) Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2) Calculer la probabilité d'interroger :

- a) un agent de maintenance ;
- b) une femme agent de maintenance ;
- c) une femme.

II) Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue, des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04 .

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'événement : « une panne se produit » ;

1) Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037 .

2) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

I) Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

II) Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2) Étude de la fonction f .

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction f .

3) Éléments graphiques et tracés.

a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe \mathcal{C} .

b) Déterminer la position de \mathcal{C} par rapport à (Δ) .

c) Tracer la courbe \mathcal{C} et la droite (Δ) .

III) Calculs d'aires.

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1) On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$.

b) Déterminer la limite l de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que $l = A\left(\frac{1}{e}\right)$.