

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a , porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs \vec{U} et \vec{V} de coordonnées respectives $(a, -5, 1 - a)$ et $(1 + b, 1, b)$.

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n , on désigne par :

A_n l'évènement : « A gagne la n -ième partie »,

B_n l'évènement : « B gagne la n -ième partie »,

C_n l'évènement : « le jeu continue après la n -ième partie »

- a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

- b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n) = \frac{3}{16} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. a. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) [unité graphique : 2 cm].

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b .

2. a. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r . Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

- b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h . Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle $OA'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C .

a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\bar{c} = R^2 \quad (c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2 \quad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) \left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2.$$

b. En déduire que $c - \bar{c} = 2i$ puis, que $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation

$$(E) : 6x + 7y = 57$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

PROBLÈME

11 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{2}[(x + (1 - x)e^{2x})].$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , (unité graphique 2 cm)

1.
 - a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à \mathcal{C} .
Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$.
 - a. Étudier le sens de variation de u .
Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0, 1]$.
Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.
 - b. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la courbe Γ d'équation $y = e^x$ et la droite D d'équation $y = x$. Les courbes Γ et D sont tracées sur la feuille annexe.

1. Soit t un réel; on désigne par M_t , le point de Γ d'abscisse t .
La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t .
Déterminer les coordonnées du point N_t .
2. On désigne par P_t le point de D d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points O , M_t , P_t et N_t . Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés $(0; 1)$, $(M_t; 1)$, $(P_t; 1)$ et $(N_t; 1)$.
 - a. Placer les points M_{-2} , P_{-2} , et N_{-2} puis construire, en justifiant, le point G_{-2} sur la feuille annexe.
 - b. Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t .
3. Quel est l'ensemble des points G_t quand t décrit \mathbb{R} ?

Partie C

1. Construire la courbe \mathcal{C} de la **partie A** sur la feuille annexe.
2. Calculer l'aire \mathcal{A} , en cm^2 , du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

Annexe problème 5

