Samedi 11/01/14.
Durée: 4 heures.

BACCALAUREAT BLANC N°1
TS1 / TS2 / TS3

Il est rappelé aux candidats que la présentation et la rédaction rentrent en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice n°1:(4 points)

Les quatre questions sont indépendantes.

1) Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles. On sait également que 35% des filles et 30% des garçons déjeunent à la cantine.
On choisit au hasard un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine?
2) Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieur ou égal à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.
3) Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'évènement «l'appareil présente un défaut d'apparence» et F l'évènement «l'appareil présente un défaut de fabrication».
On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
4) On considère l'algorithme suivant:

```
A et C sont des entiers naturels
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur C+1
                Fin Si
Fin Répéter
Afficher C.
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.
Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

Exercice n°2:(6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-1;+\infty\right[$ par: $f(x)=1+\ln(1+x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
On note D la droite d'équation réduite $y=x$.

PARTIE A:

1) a. Etudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $\left]-1;+\infty\right[$ par: $g(x)=f(x)-x$.
   a. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} g(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $\left]-1;+\infty\right[$ l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β, avec $\alpha<0$ et $\beta\in\left]2;3\right[$.
   e. Donner un encadrement à 0,1 prés de α et β.
   f. A l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de g.
      En déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite D.

PARTIE B:

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par: $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $2\le U_n\le\beta$.
2) La suite (U_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.

Exercice n°3:(5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3cm.

PARTIE A:

Soit $(E): z^3+3z^2+4z-8=0$.
En cherchant une solution évidente, résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

PARTIE B:

On donne les points A ; B et C d'affixes respectives: 1 ; $-2-2i$ et $-2+2i$.
1) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Déterminer puis représenter l'ensemble E1 des points $M(z)$ tels que: $|z+2+2i|=|z-1|$.
3) Déterminer puis représenter l'ensemble E2 des points $M(z)$ tels que: $|z+2-2i|=2$.

PARTIE C:

On pose: $Z=\dfrac{z-1}{z+2+2i},\ z\neq -2-2i$.

1) Si $z=x+iy$, donner la forme algébrique de Z en fonction de x et y.

   On vérifiera que $\operatorname{Re}(Z)=\dfrac{x^2+x+y^2+2y-2}{(x+2)^2+(y+2)^2}$.

2) Déterminer puis représenter l'ensemble E3 des points $M(z)$ du plan tels que Z soit réel.

3) Déterminer puis représenter l'ensemble E4 des points $M(z)$ du plan tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice n°4:(5 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{2}{3}U_n+\dfrac{1}{3}n+1 \end{cases}$

1) a. Calculer U_1; U_2 et U_3. On pourra donner des valeurs approchées à 0,01 près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2) a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n\leq n+3$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{3}(n+3-U_n)$.
   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par (V_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par: $V_n=U_n-n$.
   a. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n=2(\dfrac{2}{3})^n+n$.
   c. Déterminer la limite de (U_n).

4) Pour tout entier naturel n, on pose: $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k=U_0+........+U_n$ et $T_n=\dfrac{S_n}{n^2}$.
   a. Exprimer S_n en fonction de n.
   b. Déterminer la limite de (T_n).