

BACCALAUREAT BLANC N°1
TS1 / TS2 / TS3

Il est rappelé aux candidats que la présentation et la rédaction rentrent en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice n°1:(4 points)

Les quatre questions sont indépendantes.

1) Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles. On sait également que 35% des filles et 30% des garçons déjeunent à la cantine.
On choisit au hasard un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine?

2) Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieur ou égal à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} .

3) Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'évènement «l'appareil présente un défaut d'apparence» et F l'évènement «l'appareil présente un défaut de fabrication».
On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

4) On considère l'algorithme suivant:

```
A et C sont des entiers naturels
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
    Si A > 5 alors C prend la valeur C+1
    Fin Si
Fin Répéter
Afficher C.
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

Exercice n°2:(6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par: $f(x) = 1 + \ln(1+x)$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On note D la droite d'équation réduite $y = x$.

PARTIE A:

1) a. Etudier le sens de variation de la fonction f .

b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par: $g(x) = f(x) - x$.

a. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$.

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

d. Montrer que sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β , avec $\alpha < 0$ et $\beta \in]2; 3[$.

e. Donner un encadrement à 0,1 près de α et β .

f. A l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de g .

En déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite D .

PARTIE B:

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par:
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , $2 \leq U_n \leq \beta$.

2) La suite (U_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.

Exercice n°3:(5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 3cm.

PARTIE A:

Soit $(E): z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$.

En cherchant une solution évidente, résoudre (E) dans \mathbb{C} .

PARTIE B:

On donne les points A ; B et C d'affixes respectives: 1 ; $-2 - 2i$ et $-2 + 2i$.

1) Quelle est la nature du triangle ABC ?

2) Déterminer puis représenter l'ensemble E_1 des points $M(z)$ tels que: $|z + 2 + 2i| = |z - 1|$.

3) Déterminer puis représenter l'ensemble E_2 des points $M(z)$ tels que: $|z + 2 - 2i| = 2$.

PARTIE C:

On pose: $Z = \frac{z-1}{z+2+2i}$, $z \neq -2-2i$.

1) Si $z = x + iy$, donner la forme algébrique de Z en fonction de x et y .

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + x + y^2 + 2y - 2}{(x+2)^2 + (y+2)^2}.$$

On vérifiera que

2) Déterminer puis représenter l'ensemble E_3 des points $M(z)$ du plan tels que Z soit réel.

3) Déterminer puis représenter l'ensemble E_4 des points $M(z)$ du plan tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice n°4:(5 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N} par:
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1) a. Calculer U_1 , U_2 et U_3 . On pourra donner des valeurs approchées à 0,01 près.
b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2) a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $U_n \leq n + 3$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par (V_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N} par: $V_n = U_n - n$.

a. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $U_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de (U_n) .

4) Pour tout entier naturel n , on pose: $S_n = \sum_{k=0}^n U_k = U_0 + \dots + U_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n .

b. Déterminer la limite de (T_n) .