Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie Série obligatoire mars 2012

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. $P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - 2\mathrm{i}\sqrt{2} =$ $-2\mathrm{i}\sqrt{2}+4+2\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}-4-2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \iff \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Développons : $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = z^3+az^2+bz-z^2\mathrm{i}\sqrt{2}-az\mathrm{i}\sqrt{2}-b\mathrm{i}\sqrt{2} = z^3+\left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-b\mathrm{i}\sqrt{2}$.

   Par identification avec l'énoncé, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a-\mathrm{i}\sqrt{2} &=& -2-\mathrm{i}\sqrt{2}\\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} &=& 2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} &=& -2\mathrm{i}\sqrt{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -2\\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2} &=& 2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -2\\ b &=& 2\\ b &=& 2\end{array}\right.$$

   On a donc $P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

   b. En utilisant la factorisation précédente :

$$P(z)=0 \iff \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-\mathrm{i}\sqrt{2} &=& 0\\ z^2-2z+2 &=& 0\end{array}\right.$$

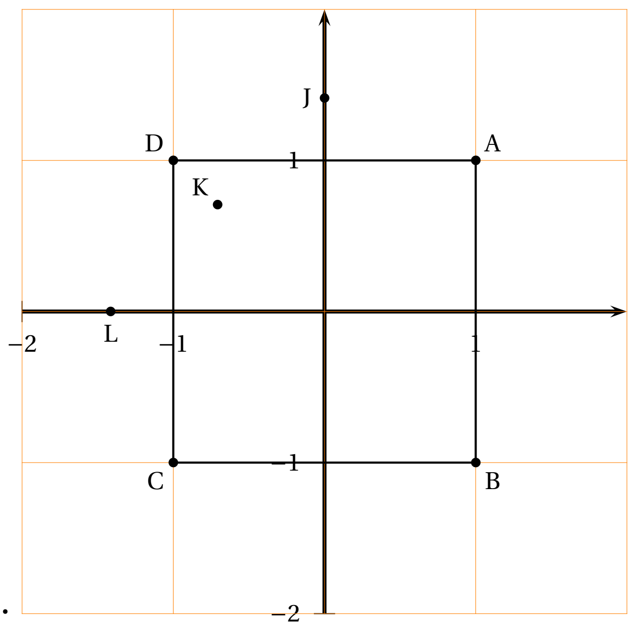
   On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$: résolution de l'équation du second degré :

$$z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2-1+2=0 \iff (z-1)^2+1=0 \iff$$
$$(z-1)^2=-1 \iff (z-1)^2=\mathrm{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-1 &=& \mathrm{i}\\ z-1 &=& -\mathrm{i}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 1+\mathrm{i}\\ z &=& 1-\mathrm{i}\end{array}\right.$$

   Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $\quad 1+\mathrm{i}$, $\quad 1-\mathrm{i}$.

Partie B :

1.



2. On a $z_K = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

K est le milieu du segment [JL] ce qui se traduit en coordonnées par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_K & = & \frac{1}{2}\left(x_J + x_L\right) \\ y_K & = & \frac{1}{2}\left(y_J + y_L\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{1}{2}(0 + x_L) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + y_L\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_L & = & -\sqrt{2} \\ y_L & = & 0 \end{array}\right.$$

Conclusion : $z_L = -\sqrt{2}$.

3. On a $|z_A|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$|z_B|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$

$\left|z_J\right|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$|z_L|^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

On a donc OA = OB = OJ = OL = $\sqrt{2}$: les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon $\sqrt{2}$.

4. **a.** Un argument de z_J est $\dfrac{\pi}{2}$ et un argument de z_D est $\dfrac{3\pi}{4}$, donc l'angle de la rotation est $\dfrac{\pi}{4}$.

b. Par définition de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, on a :

$$z_C - z_O = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(z_L - z_O\right) \iff z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_L = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right) = -1 - \mathrm{i}.$$

5. On a successivement :

O est milieu de [BD] et [AC], donc ABCD est un parallélogramme ;

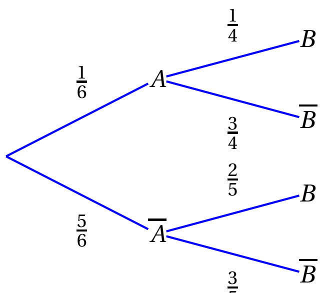
AC = BD = 2, donc ABCD est un rectangle ;

(AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc ABCD est un losange, donc finalement : ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.**



b. D'après la loi des probabilités totales : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{8}{24} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8} = 0,375$.

c. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{1}{24} \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{9}$.

2. **a.** Les parties étant indépendantes la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

La probabilité de gagner exactement trois parties est égale à :

$p(\mathrm{X} = 3) = \dbinom{10}{3}\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(1 - \dfrac{3}{8}\right)^{10-3} = \dbinom{10}{3}\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^7 \approx 0,2357 \approx 0,236$ au millième près.

b. On a $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix} \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^0 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} \approx$ $0{,}990\,9 \approx 0{,}991$ au millième près.

c. À partir du tableau donné on calcule les probabilités $P(\mathrm{X} = k - 1)$ par différence entre deux valeurs consécutives. On constate que $P(\mathrm{X} = 7)$ est la première valeur inférieure à 0,1. Donc $N = 7$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathrm{X} < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9
$P(\mathrm{X} = k - 1)$	0,009 1	0,054 6	0,147 3	0,235 7	0,247 6	0,178 2	0,089 1	0,030 6	0,006 8	0,000 9

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

VRAI ou FAUX ?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. **Énoncé 1 :**
   OUI : exemple $a_n = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2^n}$.
2. **Énoncé 2 :**
   FAUX : on a $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ qui a pour argument $\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{3}$ et $z_{20} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\times 20\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{40\mathrm{i}\pi}{3}}$. Or $\dfrac{40\pi}{3} = \dfrac{36\pi + 4\pi}{3} = 12\pi + \dfrac{4\pi}{3}$, donc z_{20} a pour argument $\dfrac{4\pi}{3} \neq \dfrac{2\pi}{3}$. Donc les points O, M_1 et M_{20} ne sont pas alignés.
3. **Énoncé 3 :**
   Proposition 3 :
   FAUX : si la courbe 3 est la représentation graphique de f, la courbe 1 est celle de F puisque c'est la seule qui contient l'origine ($F(0) = 0$).
   Or on voit sur la courbe 1 que $F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, mais $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$. Donc la courbe 1 n'est pas la représentation graphique de la primitive F.
4. **Énoncé 4 :**
   Proposition 4 : Calculons la distance de A au plan P :
   $d(\mathrm{A}\,;\,\mathrm{P}) = \dfrac{|3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}225$.
   La distance est inférieure au rayon du cercle : la réponse est VRAI.
5. **Énoncé 5 :**
   Proposition 5 :
   On sait que la fonction définie par $x \longmapsto 2$ est une solution particulière de (E).
   D'autre part les solutions de l'équation (E$'$) : $y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $K\mathrm{e}^{-2x}$.
   Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par $y = 2 + K\mathrm{e}^{-2x}$.
   Or $y(0) = 0 \iff 2 + K\mathrm{e}^0 = 0 \iff 2 + K = 0 \iff K = -2$.
   La fonction solution est donc définie par : $y = 2 - 2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On voit avec les limites en $+\infty$ et $-\infty$ que la représentation graphique est la courbe C_3. Donc FAUX

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A :

1. Posons :
$\begin{cases} u'(x) &= e^x \\ v(x) &= x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) &= e^x \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$
Toutes les fonctions étant continues car dérivables sur $[0\,;1]$, on peut procéder à une intégration par parties :
$\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = e - 0 - (e-1) = 1.$
2. **a.** $\mathscr{A}(\text{OAA}') = \dfrac{1}{2}a \times ae^a = \dfrac{1}{2}a^2e^a.$
$\mathscr{A}(\text{ABB}'\text{A}') = \dfrac{1}{2}(ae^a + e) \times (1-a) = \dfrac{1}{2}\left(ae^a - a^2e^a + e - ae\right).$
b. Les segments [OA] et [AB] étant au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ l'aire de la partie hachurée est égale à la somme des aires du triangle et du trapèze précédents diminuée de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, soit :
$\dfrac{1}{2}a^2e^a + \dfrac{1}{2}\left(ae^a - a^2e^a + e - ae\right) - \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx =$
$\dfrac{1}{2}\left(a^2e^a + ae^a - a^2e^a + e - ae\right) - 1 = \dfrac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2).$

PARTIE B :

1. Toutes les fonctions sont dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, donc :
$g'(x) = e^x - e + xe^x$.
Puis $g''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(2+x)$.
2. On sait que $e^x > 0$ quel que soit le réel x, et sur $[0\,;\,+\infty[$, $2+x \geqslant 2 > 0$: donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $g''(x) > 0$: on conclut que la fonction g' est croissante (strictement) sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. On a $g'(0) = 1 - e < 0$ et $g'(1) = e > 0$.
Donc la fonction g' monotone croissante et croissante sur $[0\,;1]$ de $g'(0) < 0$ à $g'(1) > 0$ s'annule une seule fois sur cet intervalle.
Il existe donc un réel $\alpha \in [0\,;\,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne : $0,5 < \alpha < 0,6$.
4. Sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, $g'(x) < 0$: la fonction est donc décroissante sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty]$, $g'(x) > 0$: la fonction est donc croissante sur cet intervalle.
5. D'après tous les résultats précédents, l'aire de la surface hachurée est égale à : $\dfrac{1}{2}g(a)$. Or on a vu que la fonction g a sur sur $[0\,;\,+\infty[$ et également sur $[0\,;1]$ un minimum en $x = \alpha$.
L'aire minimum est donc égale à : $\dfrac{1}{2}g(\alpha)$
Non demandé : cette aire vaut approximativement 0,088 2 unité d'aire.