Baccalauréat S Métropole 21 juin 2012

EXERCICE 1 **4 points**

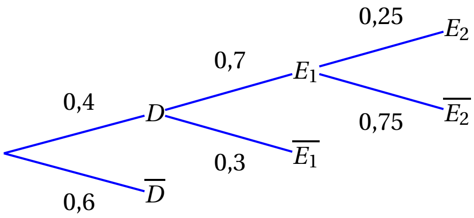
Commun à tous les candidats

1. Sur l'intervalle $[-3, -1]$, tous les points de la courbe ont une abscisse négative. VRAIE
2. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on lit que $f'(x) \geqslant 0$, donc que f est croissante. VRAIE
3. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, on a $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur cet intervalle. Or on sait que $f(0) = -1$. D'après la croissance sur l'intervalle tous les points de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1. FAUSSE
4. Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
   On sait que l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - (-1) = 1x \iff y = x - 1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$. VRAIE

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.**



b. On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

c. Calculons la probabilité d'être recruté, soit :

$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.

D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. **a.** Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilitéé d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathscr{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.

b. On a $p(X = 2) = \binom{5}{2}0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{n} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.

Il faut donc résoudre l'équation :

$1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$.

Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.

Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,0999 de recruter au moins un candidat.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. • $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{-1}{x+1}$.

   Comme $\lim\limits_{x:\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$, on a donc $\lim\limits_{x:\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x:\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$.

   • On a $\lim\limits_{x:\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, donc finalement par somme de limites : $\lim\limits_{x:\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Comme sur $[1~;~+\infty[$, $x+1>0$, et $\dfrac{x}{x+1} > 0$ la fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{u'}{u}$ avec $u = \dfrac{x}{x1}$.

   Or $u' = \dfrac{1\times(x+1) - x\times 1}{x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1)^2}$.

   Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

   Comme $x \geqslant 1$, la dérivée est clairement positive , donc la fonction est croissante sur $[1~;~+\infty[$ de $f(1) = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{2} \approx -0,193$ à 0 sa limite en plus l'infini.

   Le tableau montre que $f(x) < 0$ sur $[1~;~+\infty[$.

Partie B

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \ln n.$$

1. On obtient successivement pour u les valeurs :

   $0+1=1$

   $1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

   $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$.

2. Il suffit de modifier la sortie en : Afficher $u - \ln n$.

3. On peut conjecturer que pour n allant de 4 à 2000 la suite semble être décroissante et éventuellement converger vers une valeur proche de 0,577.

Partie B

1. On a $u_{n+1} - u_n = \left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right] = \dfrac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = f(n)$. On a vu que pour $x \geqslant 1, f(x) < 0$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ montre que $u_{n+1} < u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

2. **a.** Puisqu'on intégre de k strictement positif à $k+1$, on a donc

   $0 < k \leqslant x \leqslant k+1 \iff 0 < \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$

   On a donc en particulier $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k} \iff \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. L'intégrale sur $[k~;~k+1]$ de la fonction continue et positive est un nombre positif.

   • $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale.

   Or $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} \times (k+1-k = \frac{1}{k}$.

L'inégalité précédente s'écrit donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

- On a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$.

Donc l'inégalité précédente s'écrit $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ $\quad$ (1)

b. Pn obtient la suite des inégalités suivante :

$\ln(1+1) - \ln 1 \leqslant \dfrac{1}{1}$

$\ln(2+1) - \ln 2 \leqslant \dfrac{1}{2}$

$\ln(3+1) - \ln 3 \leqslant \dfrac{1}{3}$

....

$\ln(n) - \ln(n-1) \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

$\ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$

D'où par somme membres à membres et effet de « dominos » :

$\ln(n+1) - \ln 1 \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ ou encore

$\ln(n+1) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$

c. La fonction ln étant croissante, on a $\ln n < \ln(n+1)$ et comme $\ln(n+1) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ on en déduit que $\ln n < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \iff 0 < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, soit finalement $u_n > 0$.

3. On a vu que la suite est décroissante et ensuite qu'elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure à zéro.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z = -\frac{1}{2}, zB = -\frac{1}{2} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b. Calculer les affixes des points $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A}), \mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$ et $\mathrm{C}' = f(\mathrm{C})$ et placer les points A', B'et C' sur la figure.

c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z+1$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathscr{D}_1$, image de la droite $\mathscr{D}$ par g.

c. Démontrer que $\mathscr{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$.

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Justifier que $h(\mathrm{A}_1) = \mathrm{A}'$, $h(\mathrm{B}_1) = \mathrm{B}'$ et $h(\mathrm{C}_1) = \mathrm{C}'$.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.

4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_\mathrm{A} = -1 + \mathrm{i}, \quad z_\mathrm{B} = 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_\mathrm{C} = 1 + 3\mathrm{i}.$$

et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.
Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite $\mathcal{D}$.

2. Résoudre l'équation $(1+\mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i} = 0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1+2\mathrm{i}$, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1+\mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i}$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.

c. Déterminer l'image $\mathcal{D}_1$ de la droite $\mathcal{D}$ par la transformation g et la tracer sur la figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Déterminer les affixes des points $h(\mathrm{A}_1)$, $h(\mathrm{B}_1)$ et $h(\mathrm{A}_1)$ et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \iff |z-2| = |z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle $\mathcal{C}$ qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathcal{D}_1$.

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.