Corrigé de l'épreuve de mathématiques – Spécialité
Baccalauréat série S, 21 juin 2012

Exercice 1 (/4 points)

A l'aide des données de l'énoncé on peut construire le tableau suivant :

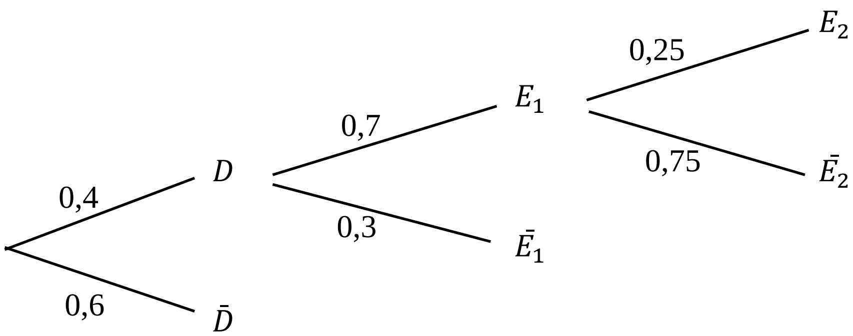
x	-3		-1		0		2
signe de f'		$-$	0	+	1	+	
f		↘		↗	-1	↗	

On peut donc en déduire :

1. VRAI. La fonction dérivée f'est négative sur $[-3;-1]$car la courbe représentative de la fonction est située en dessous de l'axe des abscisses sur cet intervalle.
2. VRAI. La fonction dérivée f'est positive sur $[-1;2]$donc la fonction f est croissante sur cet intervalle.
3. FAUX. Comme f'est strictement positive sur $]-1;0]$, la fonction f est strictement croissante sur $]-1;0]$ainsi pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;0[$, $f(x) < f(0)$avec $f(0) = -1$, on obtient : $f(x) < -1$. Ce qui contredit l'affirmation proposée.
4. VRAI. La tangente à C au point d'abscisse 0 a pour équation ; $y = f'(0)(x-0) + f(0)$soit en utilisant les données de l'énoncé : $y = x - 1$. Lorsque $x = 1$, on obtient $y = 0$donc cette tangente passe bien par le point de coordonnées $(1;0)$.

Exercice 2 (/5 points)

1. a.



b. $p(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

c. $p(F) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,93$

2. a. L'expérience qui consiste à postuler à un emploi de cadre dans l'entreprise est une épreuve de Bernoulli (deux issues possibles exactement : être recruté ou non). On appelle succès « le candidat est recruté », sa probabilité est $p = 0,07$. La répétition de cinq expériences identiques et indépendantes est un schéma de

Bernoulli. La loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes recrutées est donc une loi binomiale de paramètres 5 et 0,07.

b. Cela correspond à la probabilité $p(X = 2)$.
On a : $p(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,07^2 \times (1 - 0,07)^3 \approx 0,039$.
La probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés est d'environ 0,039.
3. On veut $p(X \geqslant 1) > 0,999$. Or $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$avec $p(X = 0) = 0,93^n$, où n correspond au nombre de dossiers traités par le cabinet de recrutement.
On doit donc résoudre l'inéquation : $1 - 0,93^n > 0,999$.
Or $-0,93^n > -0,001 \Leftrightarrow 0,93^n < 0,001$
$\Leftrightarrow \ln(0,93^n) < \ln(0,001)$(par stricte croissance de ln sur $]0; +\infty[$)
$\Leftrightarrow n\ln(0,93) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)}$(avec $\ln(0,93) < 0$)
$\Leftrightarrow n \geqslant 96$(avec $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \approx 95,187$).
Il faut donc que le cabinet de recrutement traite au minimum 96 dossiers pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999.

Exercice 3 (/6 points)

Partie A

1. $\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$et $\lim_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$donc par quotient : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.
De plus, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$et $\lim_{X \to 1} \ln(X) = 0$donc par composée : $\lim_{x \to +\infty} \ln(\frac{x}{x+1}) = 0$.
D'où, par somme : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. Notons $h(x) = \frac{x}{x+1}$, on a $h'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$
Donc : $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \times (\frac{x+1}{x}) = \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$.
Sur $[1; +\infty[$, $1 > 0$, $x > 0$et $(x+1)^2 > 0$donc $f'(x) > 0$.
La fonction *f* est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
signe de f'	+
f	$f(1)$ $\nearrow$ 0

avec $f(1) = \frac{1}{2} + \ln(\frac{1}{2}) \approx -0,19 < 0$.

3. Comme $f(1) < 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$et *f* strictement croissante sur $[1; +\infty[$donc *f* est strictement négative sur $[1; +\infty[$.

Partie B

1. Lorsque l'utilisateur entre la valeur n=3, la valeur affichée par l'algorithme est $\frac{11}{6}$(=$0 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$).

2. Variables : *i* et *n* sont des entiers naturels

u est un réel.

Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de n

Initialisation : Affecter à u la valeur 0

Traitement : Pour i variant de 1 à n.

Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$.

Affecter à u la valeur $u - \ln(n)$

Sortie : Afficher u.

3. On peut conjecturer que la suite (u_n)est décroissante. Pour le reste, elle est peut-être convergente mais on ne peut pas conjecturer de limite.

Partie C

1. $u_{n+1} - u_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n))$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(\frac{n}{n+1}) = f(n)$.

Comme f est une fonction strictement négative sur $[1; +\infty[$(vu fin de la **partie A**), on a $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n)est donc décroissante.

2. a. Pour $0 < k \leqslant x \leqslant k+1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$. D'où, $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$.

Par suite, par positivité de l'intégrale avec $k < k+1$, on a : $\int_k^{k+1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{x}) \mathrm{d}x \geqslant 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$. Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}x = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}$.

Ainsi : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

Avec, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$, on obtient bien : $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$. (1)

b. Avec $k = 1$, (1) devient : $\ln(2) - \ln(1) \leqslant 1$

Avec $k = 2$, (1) devient : $\ln(3) - \ln(2) \leqslant \frac{1}{2}$

Avec $k = 3$, (1) devient : $\ln(4) - \ln(3) \leqslant \frac{1}{3}$

...

Avec $k = n$, (1) devient : $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$

Donc, par somme, on obtient :

$\ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n) - \ln(n-1) + \cdots + \ln(3) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$

soit en simplifiant : $\ln(n+1) - \ln(1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$c'est à dire avec $\ln(1) = 0$:

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

c. De l'inégalité précédente, on déduit : $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n$. Or $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(\frac{n+1}{n})$. Avec $n+1 > n$, on a $\frac{n+1}{n} > 1$donc $\ln(\frac{n+1}{n}) > \ln(1)$d'où $\ln(\frac{n+1}{n}) > 0$.

Par suite, $0 < \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n$, d'où $u_n \geqslant 0$.

3. La suite (u_n)est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.

<u>Exercice 4 (/5 points)</u>

1. Le point A d'affixe z_A a pour coordonnées $(-1;1)$. Comme $x_A + 2 = -1 + 2 = 1 = y_A$, le point A appartient bien à la droite D.
De même, $B(0;2)$ et comme 0+2=2, $B \in D$ et $C(1;3)$ et comme 1+2=3, $C \in D$.

2. $(1+\mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z = -3 + \mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{-3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \frac{(-3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2} \Leftrightarrow z = -1 + 2\mathrm{i}$.
Comme $-1 + 2 = 1 \neq 2$, $K(-1+2\mathrm{i}) \notin D$.

3. a. Comme l'écriture complexe de g est de la forme $az + b$ où a et b sont des complexes et $a \neq 1$, g est une similitude directe.
Avec $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $az + b = z \Leftrightarrow z = \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow z = \frac{-3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}-1} = -\mathrm{i}(-3+\mathrm{i}) = 1 + 3\mathrm{i}$, la transformation g est une similitude directe de centre C, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
b. $z_{A_1} = (1+\mathrm{i})z_A + 3 - \mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) + 3 - \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$; $z_{B_1} = (1+\mathrm{i})z_B + 3 - \mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(2\mathrm{i}) + 3 - \mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}$ et
$z_{C_1} = z_C$ car C est le centre de la similitude.
c. L'image d'une droite par une similitude est une droite. Donc l'image de D est la droite qui passe par A_1 et B_1, c'est donc la droite (A_1B_1). Ainsi : $D_1 = (A_1B_1)$.
L'équation de (A_1B_1) est $x = 1$. Donc D_1 est la droite d'équation $x = 1$.

4. a. $z_{h(A_1)} = \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$; $z_{h(B_1)} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_{h(C_1)} = \frac{1}{1+3\mathrm{i}} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}\mathrm{i}$.
b. $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{2-z}{2z}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2-z|}{|2z|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2-z|}{2|z|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |2-z| = |z|$.
c. Notons E l'image de D_1 par h.
$M_2(z') \in E \Rightarrow z' = \frac{1}{z}$ avec $M(z) \in D_1$
Or avec $z = x + \mathrm{i}y$, $|2-z| = |z| \Leftrightarrow |2 - x - \mathrm{i}y| = |x + \mathrm{i}y| \Leftrightarrow (2-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 4 - 4x = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow M(z) \in D_1$
Par suite, $M_2(z') \in E \Rightarrow |2-z| = |z| \Rightarrow \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|z' - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow M_2(z') \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
d. $M(z') \in C\backslash\{O\} \Rightarrow \left|z' - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ avec $z = \frac{1}{z'}$ avec $z' \neq 0$
$\Rightarrow |2-z| = |z| \Rightarrow$ z affixe d'un point de D_1.
Ainsi, tout point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de O est bien l'image d'un point de D_1 par h.

5. $f = h\mathrm{o}\ g$ donc l'image par f de la droite D est l'image par h de la droite D_1.
L'image de D par f est donc le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.