Correction BAC Mathématiques 2014 Métropole - Série S
Enseignement obligatoire

Exercice 1 ***Partie A***

1. *$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f_1 alors pour que $\mathscr{C}_1$ passe par le point $A(0;1)$ il faut et il suffit que $f_1(0) = 1$. Or*
$$f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1.$$

2. *f_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$ alors*
$$f_1'(x) = 1 - e^{-x}.$$
Donc
$$f_1'(x) > 0$$
si et seulement si
$$1 > e^{-x}$$
donc si et seulement si
$$0 > -x$$
donc si et seulement si
$$x > 0.$$
Par ailleurs, comme pour $x \neq 0$,
$$f_1(x) = x\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$$
et que
$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$$
alors
$$\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty$$
et alors
$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty.$$
D'autre part par somme de limites usuelles,
$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty.$$
On peut alors tracer le tableau de signe de f_1' et le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) *L'intégrale I_n représente l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$.*

   (b) *En utilisant cette interprétation et le graphique donné, on peut conjecturer que (I_n) semble décroissante à partir du rang 1 et que sa limite semble être de $\dfrac{1}{2}$.*
   En effet, pour conjecturer le sens de variation, on s'aperçoit que lorsque n augmente l'aire précédemment décrite diminue.
   Par ailleurs pour la limite, $\mathscr{C}_{60}$ laisse à penser que la courbe représentative de la fonction se rapproche de plus en plus (entre 0 et 1) de la droite d'équation $y = x$. Donc l'aire précédemment délimitée devrait se rapprocher de
$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x})dx - \int_0^1 (x + e^{-nx})dx = \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x} - x - e^{-nx})dx$ *par linéarité de l'intégrale.*

Donc
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (e^{-(n+1)x} - e^{-nx})dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - \frac{e^{-nx}}{e^{-(n+1)x}}\right)dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x)\,dx.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x)\,dx$.
Or si
$$0 \leq x \leq 1$$
alors
$$e^0 \leq e^x \leq e^1$$
donc
$$1 \leq e^x \leq e$$
donc
$$-e \leq -e^x \leq -1$$
donc
$$1 - e \leq 1 - e^x \leq 0$$
or comme
$$e^{-(n+1)x} \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0;1]$$
alors pour tout $x \in [0;1]$,
$$e^{-(n+1)x}(1 - e^x) \leq 0$$
donc par positivité de l'intégrale
$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$
donc la suite (I_n) est décroissante à partir du rang 1.
Montrons que (I_n) est minorée et cela nous donnera que (I_n) converge. Or soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors soit $x \in [0;1]$:
$$0 \leq x$$
et
$$e^{-n} \leq e^{-x}$$
or $e^{-n} > 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$f_n(x) = x + e^{-nx} \geq 0$$

donc par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$I_n \geq 0.$$

Donc la suite (I_n) est décroissante à partir du rang 1 et minorée par 0 donc la suite (I_n) converge.

3. *Si $n = 0$*

$$I_0 = \int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Si $n \neq 0$ alors

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^{-n\times 0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}.$$