Corrigé du Baccalauréat S France juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a. La fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ donc $\mathrm{F}'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ donc F est une primitive de la fonction logarithme népérien.
$\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1) = 1.$

b. Posons $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ et $v(x) = x$.
u et v sont des fonctions dérivables et u' et v' sont continues sur $[1\ ;\mathrm{e}]$ donc par une intégration par parties on obtient :
$\mathrm{J} = [u(x)v(x)]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [x(\ln x)^2]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\mathrm{I}.$

c. Comme $\mathrm{I} = 1$, on a $\mathrm{J} = \mathrm{e} - 2$.

d. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I} - \mathrm{J} = 3 - \mathrm{e}.$

2. $\mathrm{MN} = \sqrt{(x_{\mathrm{N}} - x_{\mathrm{M}})^2 + (y_{\mathrm{N}} - y_{\mathrm{M}})^2} = \sqrt{(g(x) - f(x))} = \ln(x) - (\ln(x))^2$

Posons $h(x) = \ln(x) - (\ln(x))^2$.
Ainsi $h'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x}$
Or sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, $x > 0$ et $1 - 2\ln x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \geqslant \ln x \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{e}$

x	1		$\sqrt{e}$		e
$g(h'(x))$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h(\sqrt{e})$	$\searrow$	

Donc la distance MN est maximale pour $x = \sqrt{e}$ et vaut :

$$\mathrm{MN} = h(\sqrt{e}) = \ln(\sqrt{\mathrm{e}}) - (\ln(\sqrt{\mathrm{e}}))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

EXERCICE 2 **5 points**

1. a. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$.
Les coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne ...
$\left\{\begin{array}{rcl} 2\times 1 + 1 - 0 - 3 & = & 0 \\ 2\times 1 + 2 - 1 - 3 & = & 0 \\ 2\times 3 + (-1) - 2 - 3 & = & 0 \end{array}\right.$ donc les points A, B et C appartiennent au plan d'équation
$2x + y - z - 3 = 0$. Comme ces points ne sont pas alignés ils définissent un unique plan.
Donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2. $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient aux plans (P) et (Q) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - z - 4 & = & 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 & = & 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x + 2y - z - 4 & = & 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 & = & 0 \\ z & = & t\ \ (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} x & = & -2y + t + 4 \\ 2(-2y + t + 4) + 3y - 2t - 5 & = & 0 \\ z & = & t\ \ (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -6 + t + 4 \\ -y + 3 & = & 0 \\ z & = & t\ \ (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & t - 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$. Donc l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2 + t \\ y & = & 3 \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z & = & t \end{array}\right.$$

3. $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q)
$\Leftrightarrow \mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à l'intersection du plan (ABC) et de la droite $(\mathscr{D})$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z-3 & = & 0\\ x & = & t-2\\ y & = & 3\\ z & = & t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2(t-2)+3-t-3 & = & 0\\ x & = & t-2\\ y & = & 3\\ z & = & t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 4\\ x & = & 2\\ y & = & 3\\ z & = & 4\end{array}\right.$

Donc l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) est le point E(2 ; 3 ; 4).

4. $\overrightarrow{u}(1;0;1)$ est un vecteur directeur de la droite $(\mathscr{D})$. $\overrightarrow{\text{AE}}(1\,;\,2\,;\,4)$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\text{AE}} = 1\times1+0\times2+1\times4 = 5$.
Et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\text{AE}} = \|\overrightarrow{u}\|\times\text{AE}\times\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\text{AE}})$ Or $\text{AE} = \sqrt{21}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$.
De plus $\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\text{AE}}) = \dfrac{\text{AH}}{\text{AE}}$ donc $\text{AH} = \sqrt{21}\times\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{5}{\sqrt{42}}\right)^2\right)} = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$

Donc la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ est $\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances

a. $\text{R}(t) = \text{P}(\text{X} > t) = 1-\text{P}(\text{X}\leqslant t) = 1-\displaystyle\int_0^t \lambda\text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$
$= 1-\left[-\text{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1-\left(-\text{e}^{-\lambda t}+1\right) = \text{e}^{-\lambda t}$ pour tout $t\geqslant 0$.

b. $\text{P}_{\text{X}>t}(\text{X}>t+s) = \dfrac{\text{P}((\text{X}>t)\cap(\text{X}>t+s))}{\text{P}(\text{X}>t)} = \dfrac{\text{P}(\text{X}>t+s)}{\text{P}(\text{X}>t)} = \dfrac{\text{e}^{-\lambda(t+s)}}{\text{e}^{-\lambda t}} = \text{e}^{-\lambda s}$
Donc la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s\geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $\text{P}_{\text{X}>t}(\text{X}>t+s)$ ne dépend pas du nombre $t\geqslant 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.

a. $\text{P}(\text{X}\leqslant 1000) = 1-\text{P}(\text{X}>1000) = 1-e^{-0,00026\times1000} = 1-\text{e}^{-0,26} \simeq 0,23$.
$\text{P}(\text{X}>1000) = \text{e}^{-0,00026\times1000} = \text{e}^{-0,26} \simeq 0,77$.

b. $\text{P}_{\text{X}>1000}(\text{X}>2000) = \text{e}^{-0,00026\times1000} = \text{e}^{-0,26}$. Sachant que l'évènement $(\text{X}>1000)$ est réalisé, la probabilité de l'évènement $(\text{X}>2000)$ est d'environ 0,77.

c. Il faut calculer $\text{P}_{\text{X}>2000}(\text{X}\leqslant 3000)$.
L'évènement contraire de $(\text{X}\leqslant 3000)$ est $(\text{X}>3000)$ donc
$\text{P}_{\text{X}>2000}(\text{X}\leqslant 3000) = 1-\text{P}_{(\text{X}>2000)}(\text{X}>3000)$.
D'après le résultat de la question 1. b. avec $t = 2000$ et $s = 1000$, on obtient :
$\text{P}_{(\text{X}>2000)}(\text{X}>3000) = \text{P}(\text{X}>1000) = \text{e}^{-0,26}$

Finalement $\text{P}_{(\text{X}>2000)}(\text{X}\leqslant 3000) = 1-\text{e}^{-0,26}$.
Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures est aussi de 0,77.
C'était prévisible car X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

Exercice 4 — 5 points

1. Figure en fin d'exercice.

2. $z'_{\text{A}} = z_{\text{A}}^2-4z_{\text{A}} = (1+\text{i})^2-4(1+\text{i}) = -4-2\text{i}$.
$z'_{\text{B}} = z_{\text{B}}^2-4z_{\text{B}} = (3-\text{i})^2-4(3-\text{i}) = -4-2\text{i}$. Les images des points A et B sont confondues.

3. $z' = z^2-4z = -5 \Leftrightarrow z^2-4z+5 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{4-2\text{i}}{2} = 2-\text{i}$ et $z_2 = 2+\text{i}$.

4. **a.** $z'+4 = z^2-4z+4 = (z-2)^2$.

b. $\left|z'+4\right| = |(z-2)^2| = |z-2|^2$ et lorsque z est différent de 2,
$\arg\left(z'+4\right) = \arg\left(z-2\right)^2 = 2\arg\left(z-2\right)$.

c. Lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2, on a $\text{IM} = 2 = |z-2|$ donc $|z'+4| = 2^2 = 4$ donc M′ décrit le cercle de centre J(−4) et de rayon 4.

5. $2+2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$

a. $\text{JE} = |2+2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}-2| = |2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}| = 2|\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}| = 2$
$\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{\text{IE}}\right) = \arg(2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

b. $\text{JE}' = |z'_{\text{E}} + 4| = |z_{\text{E}} - 2|^2 = 4$

$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right) = 2\arg(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{IE}}) = 2 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

c.