<u>Exercice 1 :</u> Sur 3 points *(commun à tous les candidats)*

1) (P) : x + 2y – z + 1 = 0 et (P’) : – x + y + z = 0.
$\overrightarrow{n}$ (1 ; 2 ; – 1) est un vecteur normal du plan (P)
$\overrightarrow{n'}$ (– 1 , 1 , 1) est un vecteur normal du plan (P’)

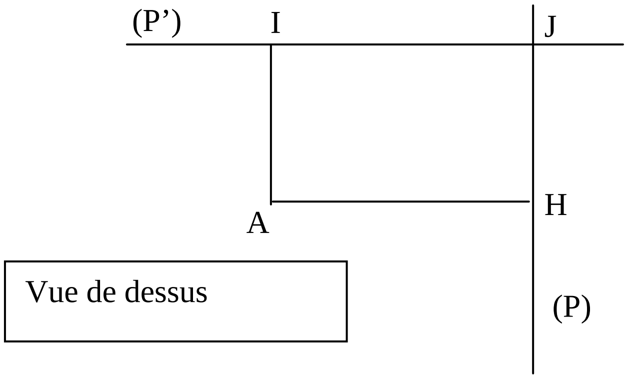
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 1 \times (-1) + (2 \times 1) + (-1) \times 1 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.
Donc les plans (P) et (P') sont perpendiculaires (et donc sécants).

2) Déterminons deux points appartenant à la droite (d) :
Pour t = 0 $\quad x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$ et $z = 0$
Pour t = 1 $\quad x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$ et $z = 1$
Les points $B\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ et $C\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ appartiennent à la droite (d).
Vérifions que B et C appartiennent aux plans (P) et (P’).
(P) : x + 2y – z + 1 = 0
$$-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = 0 \text{ donc } B \in (P)$$
$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - 1 + 1 = 0 \text{ donc } C \in (P)$$
(P’) : – x + y + z = 0.
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = 0 \text{ donc } B \in (P')$$
$$-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 1 = 0 \text{ donc } C \in (P')$$
Les plans (P) et (P’) ont deux points en communs B et C, ils se coupent donc selon la droite (BC). Comme les points B et C appartiennent à la droite (d), par conséquent **les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).**

3) Distance de A au plan (P), notons H le projeté orthogonal de A sur (P).
$$d(A, (P)) = AH = \frac{|0 + 2 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \qquad \mathbf{d(A, (P)) = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

Distance de A au plan (P’), notons I le projeté orthogonal de A sur (P’)
$$d(A, (P')) = AI = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \mathbf{d(A, (P')) = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

4) Notons J le projeté orthogonal de A sur la droite (d).
Comme les plans (P) et (P') sont perpendiculaires et qu’ils se coupent selon la droite (d), le triangle AHJ est donc rectangle en H. (voir dessin)
On a $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$ et $HJ = AI = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Donc d’après le théorème de Pythagore on a : $AJ^2 = AH^2 + HJ^2 = \frac{6}{9} + \frac{12}{9} = 2$
Donc la distance du point A à la droite (d) est $AJ = \sqrt{2}$



<u>Exercice 2 :</u> Sur 3 points *(commun à tous les candidats)*

1) Restitution organisée de connaissances

Soit u et v deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle [a ; b].

Pour tout x de [a , b] on a : (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)
Soit u'(x)v(x) = (uv)'(x) – u(x)v'(x)

En intégrant cette expression de a à b et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[(uv)(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

D'où la formule d'intégration par partie pour deux fonctions u et v dérivables, à dérivées continues sur un intervalle [a ; b].

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x).v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

2)

a) $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

Posons $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$
$u'(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$

Par intégration par partie :

$$J = \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_a^b e^x \sin x dx$$

Soit $J = e^{\pi} \sin \pi - e^{\pi} \sin 0 - I$

J = – I ou I = – J

$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

Posons $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin x$
$u'(x) = e^x$ et $v(x) = -\cos x$

Par intégration par partie :

$$I = \left[-e^x \cos x\right]_0^{\pi} + \int_a^b e^x \cos x dx$$

Soit $I = -e^{\pi} \cos \pi + e^0 \cos 0 + J$

$I = J + e^{\pi} + 1$

b) On a le système : $\begin{cases} I = -J \\ I = J + e^{\pi} + 1 \end{cases}$

Soit $-2J = e^{\pi} + 1$ soit $\mathbf{J = -\dfrac{e^{\pi} + 1}{2}}$

Soit $\mathbf{I = \dfrac{e^{\pi} + 1}{2}}$

<u>Exercice 3 :</u> Sur 5 points (*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

Partie A

1) $i^3 - (4 + i)\, i^2 + (13 + 4i)\, i - 13i = -i + (4 + i) + (13 + 4i)i - 13i$
$= -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i$
$= 0.$

Donc le nombre complexe i est solution de l'équation (E).

2) Soient a, b et c trois réels tel que pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c).$

$(z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic$
$= az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$.

Donc par identification avec $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i$ on a :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -(4 + i) \\ c - ib = 13 + 4i \\ -ic = -13i \end{cases}$ soit $\begin{cases} \mathbf{a = 1} \\ \mathbf{b = -4} \\ \mathbf{c = 13} \end{cases}$

Ainsi $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(z^2 - 4z + 13).$

3) Solutions de (E) :

$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 - 4z + 13) = 0$
$\Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$

Résolution de $z^2 - 4z + 13 = 0$:

$\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 = (6i)^2$

2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$ et $z_2 = 2 - 3i$.

Les solutions de l'équation (E) sont : i ; 2 + 3i et 2 – 3i.

Partie B

1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Soit M un point d'affixe z, notons M' d'affixe z' son image par r.

On a alors $z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_B)$.

L'affixe du point A', image du point A par la rotation r est :

$$z_{A'} - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_B).$$

$$z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(i - 2 - 3i) + 2 + 3i$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + i) + 2 + 3i$$

$$= -\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)(1 + i) + 2 + 3i$$

$$= -\sqrt{2} - i\sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 + 3i$$

$$\boldsymbol{z_{A'} = 2 + i\left(-2\sqrt{2} + 3\right).}$$

2) Affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$: $-6i$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{BA'} = -2i\sqrt{2}$

On a donc $\overrightarrow{BA'} = \frac{\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires, **les points A', B et C sont alignés**

Comme $\overrightarrow{BA'} = \frac{\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{BC}$, on a donc A' qui est l'image de C par l'homothétie h de centre B et de rapport $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

L'écriture complexe de cette homothétie h est :

Soit M un point d'affixe z, notons M' d'affixe z' son image par r.

$$z' - z_B = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - z_B)$$

soit $z' = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - 2 - 3i) + 2 + 3i$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}z - \frac{2\sqrt{2}}{3} - i\sqrt{2} + 2 + 3i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}z + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + i(3 - \sqrt{2})$$

L'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A' est :

$$\boldsymbol{z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + i(3 - \sqrt{2})}$$

<u>Exercice 3 :</u> Sur 5 points (*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

1) La similitude directe de centre A qui transforme C en H a pour angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$ et pour rapport : $\dfrac{AH}{AC}$.

Or $\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-6i}{8-8i}$

$\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{3}{8}(1-i)$

$\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{3}{8}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}) = \arg\left(\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A}\right)$ $\qquad$ $\dfrac{AH}{AC} = \left|\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A}\right|$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}) = -\dfrac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{3}{8}\sqrt{2}$

Donc la similitude directe de centre A qui transforme C en H a pour angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et pour rapport $\dfrac{3}{8}\sqrt{2}$

2) **a)** A et C sont invariants par s si : $\begin{cases} z_A = a\,\overline{z_A} + b \\ z_C = a\,\overline{z_C} + b \end{cases}$

$\begin{cases} -5 + 6i = a(-5 - 6i) + b \\ 3 - 2i = a(3 + 2i) + b \end{cases}$

$\begin{cases} -8 + 8i = a(-8 - 8i) \\ b = 3 - 2i - a(3 + 2i) \end{cases}$

$\begin{cases} \mathbf{a = -i} \\ \mathbf{b = 1 + i} \end{cases}$

D'où l'écriture complexe de s est donc : $\mathbf{z' = -i\,\overline{z} + 1 + i}$

Donc s est une similitude indirecte, mais n'est pas l'identité, et a deux points invariants A et C, donc **s est la réflexion d'axe (AC)**

b) L'affixe du point E, image de H par s est donc :

$z_E = -i\,\overline{z}_H + 1 + i$

$z_E = -i(-5) + 1 + i$

$\mathbf{z_E = 1 + 6i}$

c) Calculons le rayon du cercle Γ : Son centre est F et il passe par A, donc son rayon est :

$FA = |z_F - z_A|$

$FA = |-2 + i + 5 - 6i|$

$FA = |3 - 5i|$

$FA = \sqrt{34}$

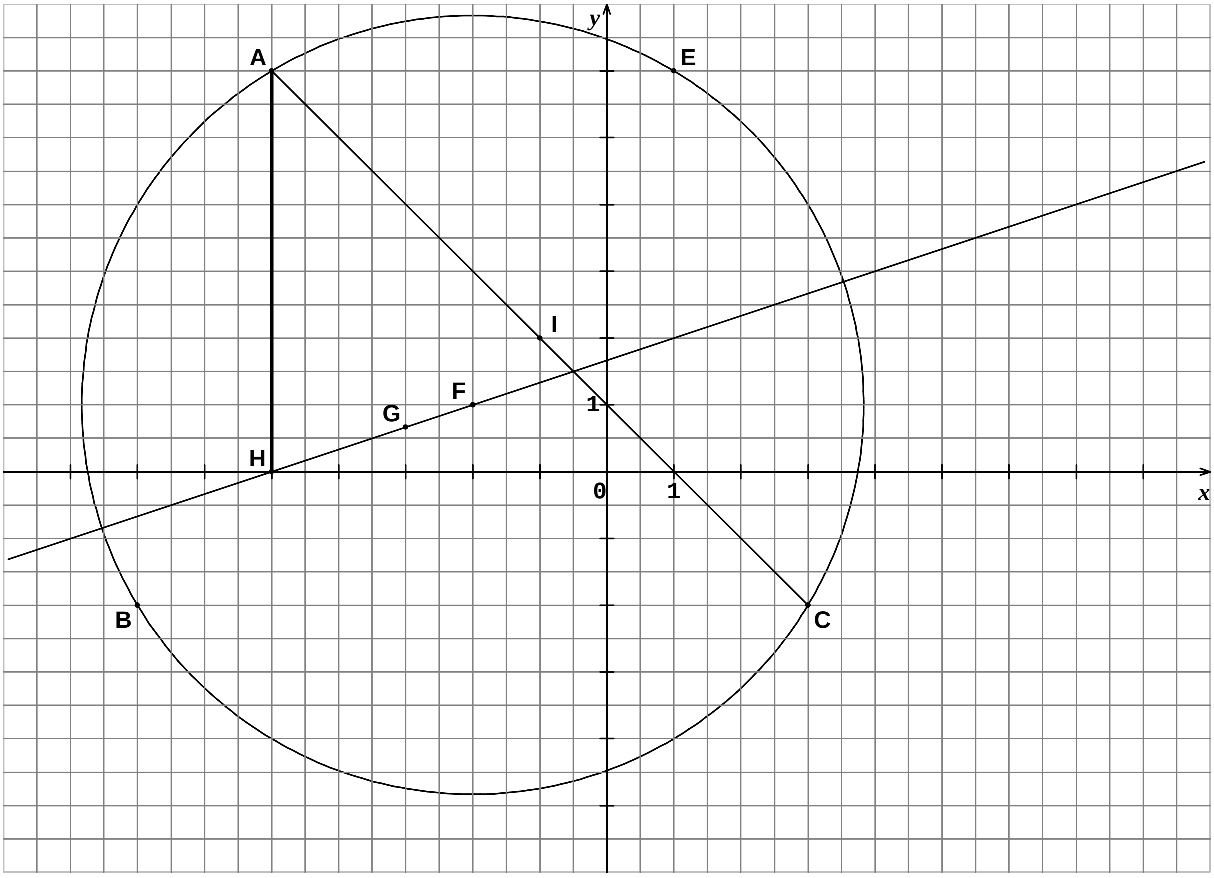
Or : $FE = |z_F - z_E|$

$FE = |-2 + i - 1 - 6i|$

$FE = |-3 - 5i|$

$FE = \sqrt{34}$

Donc **E appartient au cercle Γ** de centre F et de rayon $\sqrt{34}$.



3) I milieu de [AC] a pour affixe : $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2}$

$z_I = \dfrac{-2 + 4i}{2}$

$z_I = -1 + 2i$

L'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$ a pour écriture complexe :

$z' - z_B = \dfrac{2}{3}(z - z_B)$

$z' + 7 + 2i = \dfrac{2}{3}(z + 7 + 2i)$

$z' = \dfrac{2}{3} z - \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3} i$

D'où G image de I a pour affixe : $z_G = \frac{2}{3}(-1+2i) - \frac{7}{3} - \frac{2}{3}i$

$$\mathbf{z_G = -3 + \frac{2}{3}i}$$

Calculons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HF}$:

$z_{\overrightarrow{HG}} = -3 + \frac{2}{3}i - (-5)$ $\qquad$ $z_{\overrightarrow{HF}} = -2 + i - (-5)$

$z_{\overrightarrow{HG}} = 2 + \frac{2}{3}i$ $\qquad$ $z_{\overrightarrow{HF}} = 3 + i$

D'où : $z_{\overrightarrow{HG}} = \frac{2}{3} z_{\overrightarrow{HF}}$

Donc $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont colinéaires et donc : **H,G,F sont alignés**

<u>Exercice 4 :</u> Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

1) Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de produits vendus dans la matinée.
Le représentant voit les clients de façon indépendante.
X suit une loi binomiale de paramètre : n = 5 et p = 0,2.
$P(X = 2) = \binom{5}{2} 0{,}2^2 \times 0{,}8^3$ soit P(X = 2) = 0,2048 **Réponse d)**

2) Notons G l'événement : « l'élève est un garçon »
Notons P l'événement : « l'élève a eu son permis du premier coup »
Avec les données du texte :
Les garçons représentent le quart de l'effectif donc $P(G) = \frac{1}{4}$ donc $P(\overline{G}) = \frac{3}{4}$

Une fille sur trois a eu son permis du premier coup donc $P_{\overline{G}}(P) = \frac{1}{3}$.

Un garçon sur dix l'a eu du premier coup donc $P_G(P) = \frac{1}{10}$.

G et $\overline{G}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a : $P(P) = P(G \cap P) + P(\overline{G} \cap P)$

$$= P_G(P) \times P(G) + P_{\overline{G}}(P) \times P(\overline{G})$$
$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$
$$= \frac{11}{40}$$
$$= 0{,}275$$

Réponse b)

3) $P_P(G) = \frac{P(P \cap G)}{P(P)}$

$$= \frac{P_G(P) \times P(G)}{P(P)}$$
$$= \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{11}{40}}$$
$$= \frac{1}{11}$$

$= 0{,}091$ à 10^{-3} prés **Réponse b)**

4) Appellons :
Z_1 : Zone délimitée par le cercle de rayon 10 cm.
Z_2 : Zone délimitée par le cercle de rayon 10 cm et le cercle de rayon 20 cm.
Z_3 : Zone délimitée par le cercle de rayon 20 cm et le cercle de rayon 30 cm.

Aire de Z_1 : $10^2\pi = 100\pi$
Aire de Z_2 : $20^2\pi - 10^2\pi = 300\pi$
Aire de Z_3 : $30^2\pi - 20^2\pi = 500\pi$.
Aire du cercle de rayon 30 cm : $30^2\pi = 900\pi$
Soit k un réel positif non nul.

La probabilité d'atteindre la zone Z_1 est $P_1 = \frac{k100\pi}{900\pi} = \frac{1}{9}k$ car la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

De même $P_2 = \frac{1}{3}k$ et $P_3 = \frac{5}{9}k$.

On a $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ soit $\frac{1}{9}k + \frac{1}{3}k + \frac{5}{9}k = 1$ soit $k = 1$.

Donc la probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre (Z_3) est égale à :

$$P_3 = \frac{5}{9}$$

Réponse a)

Exercice 5 : **Sur 5 points** ***(commun à tous les candidats)***

Partie A : Etude de certaines propriétés de la courbe C

1) f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$
Pour tout x de $]-1\,;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x}\times(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= 1 - \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}}$$

2) Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
N est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.
Pour tout x de $]-1\,;+\infty[$ on a :

$$N'(x) = 2\times 1\times(1+x) + \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{2(1+x)^2+1}{1+x}.$$

Sur $]-1\,;+\infty[$ $1+x>0$
Sur $]-1\,;+\infty[$ $2(1+x)^2+1>0$ car c'est la somme d'un carré toujours positif et d'un nombre positif.
Donc sur $]-1\,;+\infty[$ $N'(x)$ est strictement positif
Par conséquente **sur $]-1\,;+\infty[$ la fonction N est strictement croissante.**

Calcul de N(0) : $N(0) = (1+0)^2 - 1 + \ln(1+0) = 0$.
Donc on en déduit que :
Sur $]-1\,;0[$, N(x) est négative ;
Sur $]0\,;+\infty[$, N(x) est positive ;
Pour x = 0, N(x) est nulle.

On a montré que $f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$
Comme $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
On a alors $f'(x) = \frac{N(x)}{(1+x)^2}$.
Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de N(x) car $(1+x)^2$ est positif.

Donc sur $]-1\,;0[$, $f'(x)$ est négative donc f est décroissante
Sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ est positive donc f est croissante

3) Soit D la droite d'équation y = x.
Les coordonnées du point d'intersection de la courbe *C* et de la droite D vérifient le système :

$$\begin{cases} y = x \\ y = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \end{cases}$$

Soit $x = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$

$\Leftrightarrow \ln(1+x) = 0$ car $1 + x \neq 0$ $(x > -1)$

$\Leftrightarrow \ln(1+x) = \ln 1$

$\Leftrightarrow 1 + x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0.$

Ainsi les coordonnées du point d'intersection de la courbe *C* et de la droite D sont (0 ; 0)

Partie B : Etude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction *f*

1) Sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ est positive donc f est croissante et f est continue donc :

Si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$

$f(0) = 0$ et $f(4) = 4 - \dfrac{\ln 5}{5} < 4$

donc si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) \in [0 ; 4]$.

2)

a) Voir en fin d'exercice.

b) Prouvons par récurrence que pour tout n de N on a : $u_n \in [0 ; 4]$.
Initialisation : on a $u_0 = 4$ donc $u_0 \in [0 ; 4]$.

Hérédité : Supposons que $u_n \in [0 ; 4]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0 ; 4]$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$
Comme $u_n \in [0 ; 4]$ alors $f(u_n) \in [0 ; 4]$ donc $u_{n+1} \in [0 ; 4]$.

La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire elle est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
Donc pour tout n de N on a : $u_n \in [0 ; 4]$.

c) $u_{n+1} - u_n = u_n - \dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}$

On a $u_n \in [0 ; 4]$ donc :
$1 + u_n \in [1 ; 5]$ donc $\ln(1+u_n) > 0$ et $1 + u_n > 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$
La suite (u_n) est donc décroissante.

d) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, **elle converge donc vers une limite ℓ**

e) On a $u_{n+1} = f(u_n)$.
La fonction *f* est continue sur [0 ; 4] donc la limite de (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$

Dans la partie A question 3 on a montré que l'équation $f(x) = x$ avait pour solution 0.

On en déduit que $\boldsymbol{\ell = 0}$.