<u>Exercice 1 :</u> Sur 5 points

Commun à tous les candidats

1. VRAI

A (2, 4, 1) : $2 \times 2 + 2 \times 4 - 1 - 11 = 0$
B (0, 4, –3) : $2 \times 0 + 2 \times 4 + 3 - 11 = 0$
C (3, 1, –3) : $2 \times 3 + 2 \times 1 + 3 - 11 = 0$

Les points A, B et C appartiennent au plan d'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$.
Comme un plan est défini par 3 points, le plan (ABC) a pour équation $2x + 2y - z - 11 = 0$.

2. FAUX

E (3, 2, – 1) : $2 \times 3 + 2 \times 2 + 1 - 11 = 0$ donc $E \in$ (ABC)
D (1, 0, – 2) : $2 \times 1 + 2 \times 0 + 2 - 11 \neq 0$, donc $D \notin$ (ABC)

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan (ABC) est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ d'après l'équation du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires, donc $\overrightarrow{DE}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC).
Donc E n'est pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3. VRAI

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur de la droite (AB).

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (CD)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -2 \times (-2) + 0 \times (-1) + (-4) \times 1 = 0$.
Les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc orthogonaux et les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4. FAUX

Soit la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Le point C appartient-il à la droite d ?

C(3 ; 1 ; –3) $\begin{cases} 3 = -1 + 2t \\ 1 = -1 + t \\ -3 = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$ Ce système n'a pas de solution, donc le point C n'appartient pas à la droite d.

5) VRAI

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\dfrac{7}{5}\\0\\-\dfrac{14}{5}\end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{AB} = \dfrac{10}{7}\,\overrightarrow{AI}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires
Le point I est sur la droite (AB).

<u>Exercice 2 :</u> Sur 5 points

Commun à tous les candidats

1. a. $f(x) = x^2 e^{1-x}$

- Limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$

Donc par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- Limite en $+\infty$

$f(x) = e \times x^2 e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

La droite d'équation y = 0 est donc asymptote horizontale à la courbe *C*.

b. La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Par produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{1-x} + x^2 \times (-e^{1-x})$

$$\boldsymbol{f'(x) = x(2 - x)\, e^{1-x}.}$$

c. Une exponentielle étant toujours positive, $f'(x)$ est du signe de $x(2 - x)$.
Faisons un tableau de signe pour étudier le signe $x(2 - x)$:

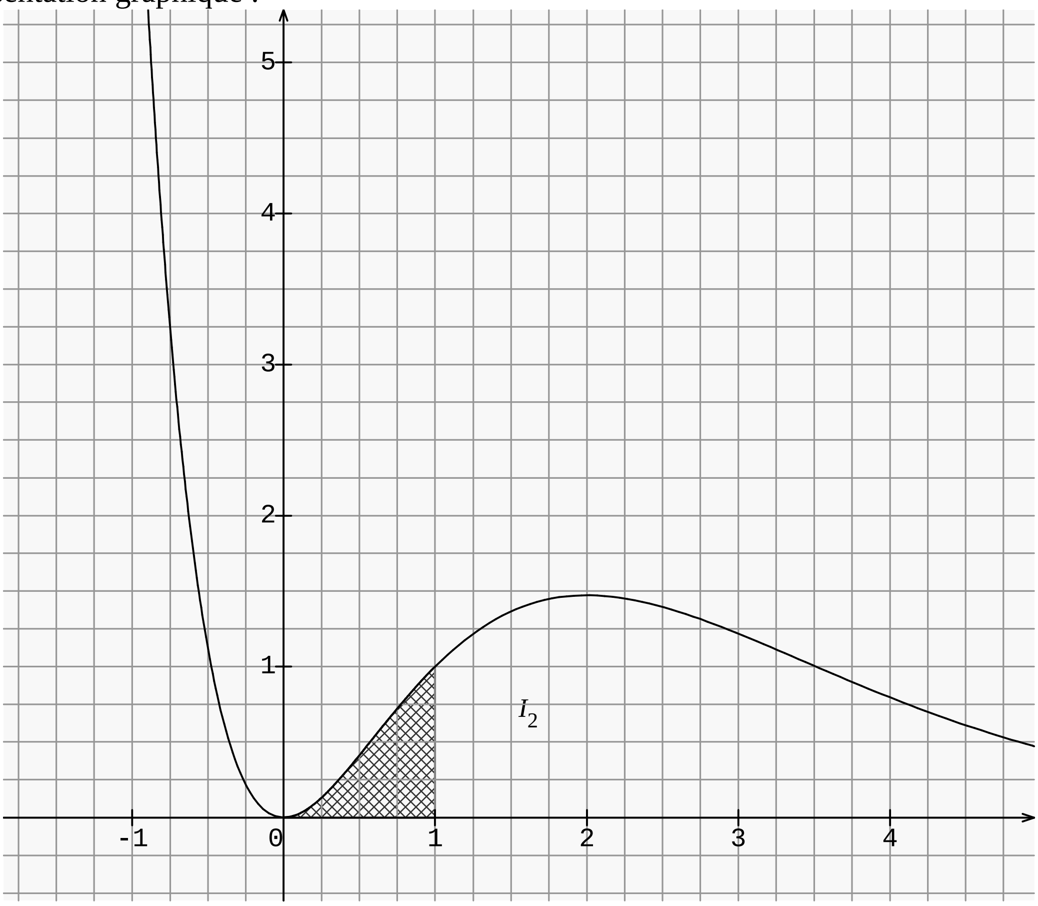
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $2 - x$		+	|	+	0	–	
Signe de x		–	0	+	|	+	
Signe de $x(2 - x)$		–	0	+	0	–	

Tableau de variation de *f* :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		$-$		+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

$f(0) = 0$ et $f(2) = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$

Représentation graphique :



2.

$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

a. Soit n un entier naturel non nul

$\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$

Soient u et v deux fonctions définie sur [0 ; 1] par :

Soit $u'(x) = e^{1-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$

Alors $u(x) = -e^{1-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$

Effectuons une intégration par parties sur I_{n+1} :

Donc $\mathrm{I}_{n+1} = \left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-(n+1)x^n e^{1-x}\right) dx$

$\mathbf{I_{n+1} = -1 + (n+1)\, I_n}$

b.

$I_1 = \int_0^1 xe^{1-x}dx$

Soient u et v deux fonctions définie sur [0 ; 1] par :

Soit $u'(x) = e^{1-x}$ et $v(x) = x$

Alors $u(x) = -e^{1-x}$ et $v'(x) = 1$

Effectuons une intégration par parties sur I_1 :

Donc $I_1 = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}dx$

$= -1 - \left[e^{1-x}\right]_0^1$

$= -1 - 1 + e$

$I_1 = e - 2$

D'après la relation de la question précédente :

$I_2 = -1 + 2I_1$

$= -1 + 2e - 4$

$\mathbf{I_2 = 2e - 5}$

c. $I_2 = \int_0^1 x^2e^{1-x}dx = \int_0^1 f(x)dx$.

Sur [0 ; 1], $f(x)$ est positive.

I_2 représente l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimité par la courbe *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

3.a.

Pour tout nombre réel x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel n non nul :

On a : $0 \le x \le 1$

$-1 \le -x \le 0$

$0 \le 1 - x \le 1$

$e^0 \le e^{1-x} \le e^1$ car exp est croissante sur [0 ; 1]

$\mathbf{x^n \le x^n e^{1-x} \le ex^n}$ car $x^n > 0$

b. Pour tout nombre réel x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel n non nul **:** $x^n \le x^n e^{1-x} \le ex^n$

Par passage à l'intégrale : $\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}dx \le \int_0^1 ex^n dx$

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{ex^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\mathbf{\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes: $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

<u>Exercice 3 :</u> candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (sur 5 points)

1. Question de cours
a. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $\arg(1) = \arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z}\right)$ donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg 1 - \arg z$

  de plus $\arg 1 = (\vec{u}, \vec{u}) = 0\ [2\pi]$

  donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$

- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)\ [2\pi]$

  $= \arg z - \arg z'\ [2\pi].$

Ce qui démontre a propriété.

b.
Soit A, B, C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c.
c – a est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$
b – a est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

D'après la propriété démontrée précédemment :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a)\ [2\pi].$$
$$= (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})[2\pi].$$
$$= (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \vec{u})\ [2\pi].$$
$$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi].$$

Ce qui démontre la propriété.

2. a. Pour tout $z \neq 0$ $\arg z' = \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)[2\pi].$

$$= -\arg\left(\overline{z}\right)\ [2\pi].$$
$$= -(-\arg z)\ [2\pi].$$
$$\mathbf{\arg z' = \arg z\ [2\pi].}$$

$\arg z' = \arg z\ [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi].$

Les points M et M' appartiennent donc à une même demi-droite d'origine O privée du point O.

b. Pour tout $z \neq 0$, $f(M) = M \Leftrightarrow z' = z$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{z}} = z$$

$$\Leftrightarrow z\,\overline{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1 \qquad \text{car } z\,\overline{z} = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow OM = 1.$$

L'ensemble des points M de P\{O} tels que *f*(M) = M est le cercle de centre O et de rayon 1.

c. M est un point du plan P distinct de O, U, et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U, et V.

$$\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\overline{z}} - 1}{\frac{1}{\overline{z}} - i} = \frac{1-\overline{z}}{1-i\,\overline{z}}$$

$$= \frac{-(\overline{z}-1)}{-i(i+\overline{z})}$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right)$$

$$= -i\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right)$$

$$= -i\,\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}}$$

$$= -i\,\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$$

On a bien l'égalité : $\mathbf{\dfrac{z'-1}{z'-i} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = -i\,\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}}$

$$\arg\frac{z'-1}{z'-i} = \arg\left[-i\,\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}\right]\ [2\pi]$$

$$= \arg(-i) + \arg\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}\ [2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arg\frac{z-1}{z-i}\ [2\pi]$$

donc $\mathbf{\arg\dfrac{z'-1}{z'-i} = = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\dfrac{z-1}{z-i}\ [2\pi]}$

3.

a. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z.

M est sur la droite (UV) privée de U et de V $\Leftrightarrow \overrightarrow{MU}$ et $\overrightarrow{MV}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow 1 - z = k\,(i - z)$ avec k réel non nul

$\Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z-i} = k\ ,\ k \neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z-i}$ est un réel non nul

b. Soit M sur la droite (UV) privée de U et de V alors $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un réel non nul.

Donc $\arg \dfrac{z-1}{z-i} = 0\ [\pi]$

Par conséquent : $\arg \dfrac{z'-1}{z'-i} = \left(\overrightarrow{VM'}, \overrightarrow{UM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Le point M' est sur le cercle de diamètre [UV] privé des points U et V.

L'image par *f* de la droite (UV) privée de U et de V est le cercle de diamètre [UV] privé de U et V.

<u>Exercice 3 :</u> candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (sur 5 points)

Partie A : Question de cours

1. <u>Théorème de Bézout</u> :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v tels que au + bv = 1.

<u>Théorème de Gauss</u> :
Soient a, b et c trois entiers non nuls.
Si a divise bc et si a est premier avec b alors a divise c.

2. On traduit les deux hypothèses :
• il existe un entier relatif k tel que bc = ka
• il existe un couple (u , v) d'entiers relatifs tels que au + bv = 1 d'après le théorème de Bézout.
En multipliant par c, on obtient acu + bcv = c ce qui donne acu + kav = c et par suite a(cu + kv) = c.
Donc a divise c.

Partie B

$$(S)\ \begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases}$$

1. • Calculons le PGCD de 19 et 12 par l'algorithme d'Euclide :

$19 = 12 \times 1 + 7$
$12 = 7 \times 1 + 5$
$7 = 5 \times 1 + 2$
$5 = 2 \times 1 + \mathbf{1}$
$2 = 1 \times 2 + 0$

On trouve PGCD(19,12) = 1. Donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u, v) de relatifs tel que 19u + 12v = 1.

• $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$

$\Rightarrow N \equiv 13 \times 12v\ [19]$ or $13 \times (19u + 12v) = 13$ donc $13 \times 12v \equiv 13\ [19]$
(car $12v \equiv 1[19]$)

$N \equiv 13\ [19]$

$\Rightarrow N \equiv 6 \times 19u\ [12]$ or $6 \times (19u + 12v) = 6$ donc $6 \times 19u \equiv 6[12]$
(car $19u \equiv 1[12]$)

$N \equiv 6\ [12]$

Donc N est solution de (S)

2. a. Soit n_0 solution de (S). On a donc $\begin{cases} n_0 \equiv 13(19) \\ n_0 \equiv 6(12) \end{cases}$

Comme $\begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases}$ on a donc $\begin{cases} n \equiv n_0 \equiv 13(19) \\ n \equiv n_0 \equiv 6(12) \end{cases}$, donc **(S)** $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{n \equiv n_0\ (19)} \\ \mathbf{n \equiv n_0\ (12)} \end{cases}$

b. $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - n_0 = k \times 19 \\ n - n_0 = k' \times 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow k \times 19 = k' \times 12$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k' = 19 \times k'' \\ k = 12 \times k'' \end{cases}$ (D'après le théorème de Gauss et PGCD (19 ; 12) = 1)

D'où $n - n_0 = 19 \times 12 \times k'' \Leftrightarrow$ **$n \equiv n_0$ [19 ×12].**

3. <u>Couple (u , v) solution de 19u + 12v = 1</u>

(1) $19 = 12 \times 1 + 7$
(2) $12 = 7 \times 1 + 5$
(3) $7 = 5 \times 1 + 2$
(4) $5 = 2 \times 2 + 1$

D'où : $5 - 1 = \underline{2 \times 2}$
$7 \times 2 = 5 \times 1 \times 2 + \underline{2 \times 2}$ (on multiplie **(3)** par 2)
$7 \times 2 = 5 \times 1 \times 2 + 5 - 1$
$7 \times 2 = 5 \times 3 - 1$
$7 \times 2 + 1 = \underline{5 \times 3}$
$12 \times 3 = 7 \times 1 \times 3 + \underline{5 \times 3}$ (on multiplie **(2)** par 3)
$12 \times 3 = 7 \times 1 \times 3 + 7 \times 2 + 1$
$12 \times 3 = 7 \times 5 + 1$
$12 \times 3 - 1 = \underline{7 \times 5}$
$19 \times 5 = 12 \times 1 \times 5 + \underline{7 \times 5}$ (on multiplie **(1)** par 5)
$19 \times 5 = 12 \times 1 \times 5 + 12 \times 3 - 1$
$\mathbf{1 = 19 \times (-5) + 12 \times 8}$

On peut donc prendre comme couple **(u , v) = (– 5 , 8).**

Calculons N : $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u =$ **678**

b. • Cherchons d'abord une solution particulière de (S).
N est solution de (S) d'après **1.**.
n_0 = N = 678 est solution de (S).

• D'après **2. b.** $n \equiv n_0$ [19 ×12]. $\Leftrightarrow n \equiv 678$ [19 ×12]
$\Leftrightarrow n \equiv -6$ [12 × 19]

S = { 678 + 228k, k ∈ ℤ }

4. n , un entier naturel est tel que $\begin{cases} n = 12k + 6 \\ n = 19k' + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases} \Rightarrow n \equiv 678[12 \times 19]$.

Or $678 = 228 \times 2 + 222$

Le reste de la division de n par 228 est donc **r = 222**.

Exercice 4 : Sur 5 points

1. a. La probabilité de crever le ballon est de 0,2, donc la probabilité de le laisser intact est de $1 - 0,2 = 0,8$.
Il doit donc le laisser intact aux deux tirs : $p = 0,8 \times 0,8 = 0,64$
La probabilité que au bout de deux tirs le ballon soit crevé, est de **0,64.**

b. Pour que 2 tirs suffisent pour crever le ballon, il faut
soit réussir au premier tir
soit rater le premier tir et réussir le deuxième.
Donc $p = 0,2 + 0,8 \times 0,2 = 0,36$
La probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon est de **0,36.**

c. L'événement contraire de « il suffit de n tirs pour crever le ballon », (au moins un tir réussi sur le n) est « aucun tir réussi ».
La probabilité qu'il n'y ait aucun tir de réussi sur les n tir est de $0,8^n$
Donc : $\mathbf{p_n = 1 - (0,8)^n}$.

d. $p_n > 0,99$
$1 - (0,8)^n > 0,99$
$-(0,8)^n > -0,01$
$(0,8)^n < 0,01$
$n \ln 0,8 < \ln 0,01$
$n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ (car $\ln 0,8 < 0$)
$n > 20,63$
Donc pour $n \geq 21$, $p_n > 0,99$.

2. Le dé est régulier donc il y a donc équiprobabilité que le dé tombe sur chaque face.
Cette probabilité est $\frac{1}{4}$.
Cas où le dé tombe sur face 1 : Le tireur n'a qu'un tir (qu'il doit réussir)
$q_1 = \frac{1}{4} \times 0,2 = 0,05$

Cas où le dé tombe sur face 2 : Le tireur n'a que 2 tirs
$q_2 = \frac{1}{4} \times 0,36 = 0,09$

Cas où le dé tombe sur face 3 : Le tireur n'a que 3 tirs
$q_3 = \frac{1}{4} \times (1 - (0,8)^3) = 0,122$

Cas où le dé tombe sur face 4 : Le tireur n'a que 4 tirs
$q_4 = \frac{1}{4} \times (1 - (0,8)^4) = 0,1476$

Si le dé est équilibré, la probabilité de crever le ballon est donc
$0,05 + 0,09 + 0,122 + 0,1476 =$ **0,4096**.

3.

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41
Fréquence de sortie f_k	0,29	0,245	0,26	0,205

b. $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(f_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(f_3 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(f_4 - \frac{1}{4}\right)^2$

$= (0,29 - 0,25)^2 + (0,245 - 0,25)^2 + (0,26 - 0,25)^2 + (0,205 - 0,25)^2$

$= 0,00375$

Donc $\mathbf{d^2 = 0,00375}$.

c. Le neuvième décile D_9 de la série des valeurs simulées de d^2 est 0,00452.
Cela signifie que 90% des valeurs de d^2 obtenues au cours de ces 1 000 simulations sont dans l'intervalle [0 ; 0,00452].
Comme la valeur observée de d^2 est inférieure à cette valeur seuil de 0,00452
(0,00375 < 0,00452) on peut convenir que **le dé n'est pipé avec un risque de 10%.**