Bac S 2013 - Polynésie
Éléments de correction

***

Exercice 1

1. (a) • *Intersection avec l'axe des ordonnées :* $f(0) = 2$, le seul point d'intersection avec l'axe des ordonnées est $(0, 2)$.
   • *Intersection(s) avec l'axe des abscisses :* $f(x) = 0$ ssi $x + 2 = 0$, le seul point d'intersection avec l'axe des abscisses est $(-2, 0)$.

   (b) Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   Pour la limite en $+\infty$, on développe :
$$f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$$
   Le premier terme donne une limite de référence : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Par somme,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
   L'axe des abscisses (d'équation $y = 0$) est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

   (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$$f'(x) = e^{-x}(1 - (x + 2)) = -e^{-x}(1 + x)$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. (a) $S_4 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f\left(\frac{k}{4}\right) \simeq 1,642$.

   (b) On complète l'algorithme comme ceci :

Variables :	N est un nombre entier
	S est un nombre réel
	k est un nombre entier
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
	Lire N
Traitement :	Pour k variant de 0 à $N - 1$
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{N} f\left(\frac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. (a) $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)dx = g(1) - g(0) = 3 - 4e^{-1}$.

   (b) $|\mathscr{A} - S_4| \simeq 0,114$.

Exercice 2

1. **Réponse d.**

$$\left|i\frac{z_1}{z_2}\right| = |i|\frac{|z_1|}{|z_2|} = 1\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\arg\left(i\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(i)+\arg(z_1)-\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$

2. **Réponse c.**

   $-z=\overline{z}$ ssi $\overline{z}+z=0$ ssi $\mathrm{Re}(z)=0$.

3. **Réponse a.**

   $\overrightarrow{AB}(-2,3,1)$ est un vecteur directeur et C un point de la droite.

4. **Réponse b.**

   $\overrightarrow{u}_{\Delta}(1,1,2)$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{n}(3,-5,1)$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$. On a :

$$\overrightarrow{u}_{\Delta}.\overrightarrow{n}=0$$

Exercice 3

Partie 1.

1. $\mathbb{P}(C\cap H)=0,30\times 5/6=0,25$.
2. (a) $\mathbb{P}(C)=0,30$, $\mathbb{P}(H)=13/20$ donc $\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(H)=0,195\neq\mathbb{P}(C\cap H)$. Les événements ne sont donc pas indépendants.

   (b) La formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(H)=\mathbb{P}(C\cap H)+\mathbb{P}(V\cap H)+\mathbb{P}(J\cap H)$$

   donne $\mathbb{P}(J\cap H)=0,20$.
   Puis :

$$\mathbb{P}_J(H)=\frac{\mathbb{P}(J\cap H)}{\mathbb{P}(J)}=\frac{0,20}{0,25}=0,80$$

Partie 2.

1. $p=0,30$ et $n=60$ (qui vérifient bien les conditions $n\geq 30$, $np\geq 5$ et $n(1-p)\geq 5$) donnent l'intervalle $[0,184\ ;\ 0,416]$.
2. La fréquence observée dans l'échantillon est $f=\frac{12}{60}=0,20$ qui appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique. La fonction n'est pas défectueuse en considérant cet échantillon.

Partie 3.

1. $\mathbb{P}(180\leq X\leq 220)=\mathbb{P}(X\leq 220)-\mathbb{P}(X\leq 180)=0,841-0,159=0,682$.
2. $\mathbb{P}(X\geq 240)=1-\mathbb{P}(X<240)=1-\mathbb{P}(X\leq 240)=1-0,977=0,023$.

Exercice 4

1. (a) $u_1=3/4$ et $u_2=9/10$.

(b) Par récurrence. On note $P(n)$ la propriété : "$u_n > 0$".
Initialiation : $u_0 = 1/2 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain rang n, alors par hypothèse de récurrence, $3u_n > 0$ et $1+2u_n > 0$ et donc $\dfrac{1}{1+2u_n} > 0$. Par produit, $u_{n+1} > 0$ et $P(n+1)$ est encore vraie.
Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n.

2. (a) Tous les termes de la suite étant strictement positifs, on peut étudier le quotient u_{n+1}/u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}$$

On sait que $0 < u_n < 1$, on a donc que $1 < 1+2u_n < 3$ et donc $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{1+2u_n} < 1$. On obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

(u_n) est donc croissante.

(b) (u_n) est croissante et majorée (par 1), elle est donc convergente.

3. (a)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{1+2u_n-3u_n} \\ &= 3\frac{u_n}{1-u_n} \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

(b) $v_0 = 1$ et $v_n = 3^n$.

(c)

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \implies v_n(1-u_n) = u_n \implies u_n(1+v_n) = v_n \implies u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$$

On en déduit que $u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$.

(d)

$$u_n = \frac{3^n}{1+3^n} = \frac{3^n}{3^n\left(\dfrac{1}{3^n}+1\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{3^n}+1}$$

On a $-1 < 1/3 < 1$ donc $\lim \dfrac{1}{3^n} = 0$ et $\lim u_n = 1$.