

LIBAN BAC S 2013 - non spécialistes

Éléments de correction

Exercice 1

Q1. d

$\vec{u}_1(1, 2, 3)$ et $\vec{u}_2(1, 1, -1)$ sont des vecteurs directeurs, respectivement de \mathcal{D} et \mathcal{D}' et $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.

Q2. c

\vec{u}_2 est un vecteur normal de \mathcal{D} et $t + 1 + 2t - 1 - (3t + 2) + 2 = 0$ donc \mathcal{D} contient \mathcal{D} .

Q3. c

$\vec{AB}(2, 4, 6)$, $\vec{AC}(-4, 6, 2)$ et $\vec{BC}(-6, 2, -4)$, on a $AB = AC = BC$.

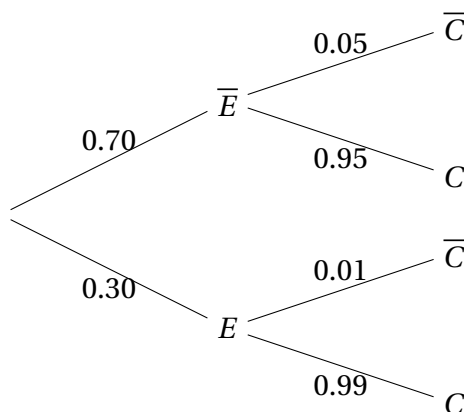
Q4. b

Pour $k = 0$ on obtient que le point $M(1, 3, 4)$ appartient à \mathcal{D}' . \vec{u}_2 et \vec{AM} sont deux vecteurs coplanaires de \mathcal{D}' non colinéaires et pour $\vec{n}(3, -1, 2)$ on a $\vec{n} \cdot \vec{AM} = \vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$.

Exercice 2

Partie A.

1. Arbre pondéré de la situation :



2. $P(\bar{E} \cap C) = P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(C) = 0.70 \times 0.95 \approx 0.665$.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(\bar{E} \cap C) + P(E \cap C) = 0.70 \times 0.95 + 0.30 \times 0.99 \approx 0.962$.

4. $P_C(E) = \frac{P(C \cap E)}{P(C)} \approx 0.309$.

Partie B.

1. $P(0.16 \leq X \leq 0.18) \approx 0.9044$.

2. (a) Z suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

(b) $0.16 \leq X \leq 0.18 \Leftrightarrow \frac{0.16 - 0.17}{\sigma_2} \leq \frac{X - 0.17}{\sigma_2} \leq \frac{0.16 - 0.18}{\sigma_2} \Leftrightarrow \frac{-0.01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0.01}{\sigma_2}$

L'intervalle est donc $\left[\frac{-0.01}{\sigma_2}, \frac{0.01}{\sigma_2} \right]$.

(c) On obtient $\frac{0.01}{\sigma_2} \approx 2.57$ et $\sigma_2 \approx 0.004$.

Exercice 3**Partie A.**

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à \mathcal{C}_1 au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_1 au voisinage de $-\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x + 1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

3. f_1 est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas et :

$$f_1'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

Quotient de termes strictement positifs, f_1 est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$4. I = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = [\ln(1 + e^x)]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right).$$

I est la valeur de l'aire, en unités d'aire, comprise entre \mathcal{C}_1 , l'axe des abscisses et les axes $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B.

$$1. f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^x + 1}{1 + e^x} = 1.$$

$$2. M(x, f_1(x)) \text{ et } P(x, f_{-1}(x)) \text{ donc } K\left(\frac{x+x}{2}, \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2}\right) \text{ d'où } K(x, \frac{1}{2}).$$

3. On en déduit que \mathcal{C}_{-1} est obtenue par symétrie de \mathcal{C}_1 par rapport à l'axe $y = 1/2$.

4. L'aire cherchée est :

$$\int_0^1 f_1(x) - f_{-1}(x) dx = \int_0^1 f_1(x) - (1 - f_1(x)) dx = \int_0^1 2f_1(x) dx = 2I - 1 = 2\ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) - 1$$

Partie C.

$$1. \text{ VRAIE : On a } f_k'(x) = \frac{ke^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}.$$

• pour $k > 0$, on a f_k décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0$

• pour $k < 0$, on a f_k croissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 1$

• pour $k = 0$, on a $f_0(x) = 1/2$ pour tout x .

2. FAUSSE : contre exemple : $k = -1$.

3. VRAIE : La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1 + e^{-t/2}}$ est croissante et $g(10) \simeq 0.993 > 0.99$.

Exercice 4**Partie A.**

1. Il s'agit de l'algorithme 3.
2. (v_n) semble croissante et convergente vers un réel proche de 2.97.
3. (a) On note $P(n)$ la propriété " $0 < v_n < 3$ "
Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n , alors on a :

$$\begin{aligned}
 & 0 < v_n < 3 \\
 \Rightarrow & -3 < -v_n < 0 \\
 \Rightarrow & 3 < 6 - v_n < 6 \\
 \Rightarrow & \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \\
 \Rightarrow & \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < 3 \\
 \Rightarrow & 0 < v_{n+1} < 3
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est encore vraie.

(b)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

Puisque $0 < v_n < 3$, on a que $6 - v_n > 0$ pour tout n et donc pour tout n , $v_{n+1} - v_n > 0$ et (v_n) est croissante.

(c) (v_n) est croissante et majorée par 3, elle est donc convergente.

Partie B.

1.

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= \frac{1}{v_{n+1} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} \\
 &= \frac{1}{\frac{9 - 3 \times (6 - v_n)}{6 - v_n}} = \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n} \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{3 - v_n + 3}{v_n - 3} = \frac{1}{3} \times \left(-1 + \frac{3}{v_n - 3} \right) \\
 &= w_n - \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$2. w_n = w_0 - \frac{1}{3}n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} = -\frac{3+2n}{6} \text{ puis } v_n = \frac{1}{w_n} + 3 = -\frac{6}{3+2n} + 3$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$