⋆ France Juin 2009 - Bac S - Mathématiques - Corrigé ⋆

Exercice 1

1.a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$ donc la suite (v_n) est $\boxed{\text{géométrique}}$ de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$.

1.b. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or $v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6$ et on obtient bien $\boxed{u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6}$

1.c. $\frac{1}{3} \in]-1\ ;\ 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc on en déduit facilement que la suite (u_n) converge et que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$

2.a. Appliquons la formule de récurrence définissant (w_n) pour $n = 10$:
$10w_{10} = 11w_9 + 1$ donc $10w_{10} = 11 \times 19 + 1 = 210$ donc $\boxed{w_{10} = 21}$

2.b. On conjecture que la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $w_0 = 1$, autrement dit que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $w_n = 2n + 1$. Démontrons-le par récurrence sur n : notons $\mathscr{P}_n$ la proposition « $w_n = 2n + 1$ ».
• Initialisation : $w_0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
• Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. On sait que $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$. Or par hypothèse de récurrence, on sait que $w_n = 2n+1$ donc $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(2n+1)+1 = 2n^2+5n+3 = (2n+3)(n+1)$. Or $n + 1 \neq 0$ donc on en déduit que $w_{n+1} = 2n + 3 = 2(n + 1) + 1$ et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
• Conclusion : par le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\boxed{w_n = 2n + 1}$ d'où $\boxed{w_{2009} = 4019}$

Exercice 2

I.1. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par passage à l'inverse, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + xe^{-x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = \ln(1) = 0$ par continuité de la fonction ln en 1. On a donc bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

I.2. Posons $u(x) = 1 + xe^{-x}$ pour tout x dans $[0; +\infty[$. La fonction u est clairement dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout x dans $[0; +\infty[$, on a :

$$u'(x) = 0 + 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$$

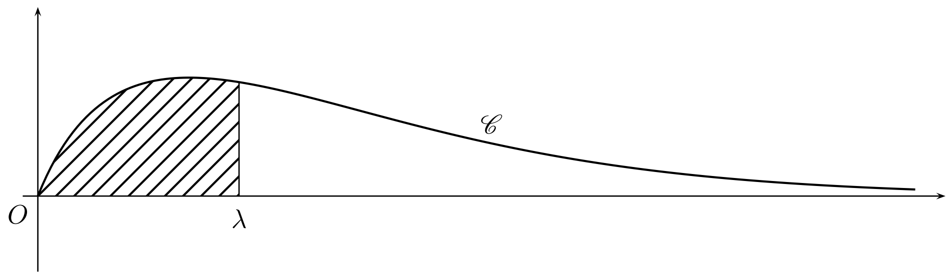
On sait que $e^{-x} > 0$. D'autre part, $x \geqslant 0$ donc $xe^{-x} \geqslant 0$ donc $u(x) \geqslant 1 > 0$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[0; +\infty[$ donc d'après le cours, $f = \ln \circ u$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout x dans $[0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{(1 - x)e^{-x}}{1 + xe^{-x}}$$

On sait que $e^{-x} > 0$ et $u(x) = 1 + xe^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est bien du signe de $1 - x$.

I.3. Par suite, $f'(x) > 0$ si $x \in [0; 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]1; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

II.1.a. Représentation graphique de $A(\lambda)$:
La fonction f est continue et positive sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale $A(\lambda)$ désigne l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$:



II.1.b. D'après la question **I.3.** on sait que f présente un maximum en $x = 1$ donc pour tout x dans $[0; +\infty[$, $f(x) \leqslant f(1)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^\lambda f(x)dx \leqslant \int_0^\lambda f(1)dx$, soit $\boxed{A(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)}$ (c'est évident géométriquement !)

II.2.a. On procède par intégration par parties :
$u'(x) = e^{-x}$ $\quad u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

$$\int_0^\lambda xe^{-x}dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} + \int_0^\lambda e^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^\lambda$$

donc finalement $\boxed{\int_0^\lambda xe^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1}$

II.2.b. On sait que pour tout x dans $[0; +\infty[$, $xe^{-x} \geqslant 0$ donc $\ln(1 + xe^{-x}) \leqslant xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale (les fonctions sont bien continues sur $[0; \lambda]$), on obtient :

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \ln(1 + xe^{-x})dx \leqslant \int_0^\lambda xe^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$$

II.3. Pour $\lambda = 5$, une calculatrice donne $\lambda \times f(1) \simeq 1,57$ et $-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 \simeq 0,96$. C'est donc la deuxième méthode qui donne le meilleur majorant dans le cas $\lambda = 5$: $\boxed{A(\lambda) \leqslant 0,96}$

Exercice 3

I. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \dfrac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \dfrac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \dfrac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$ $\square$

II.1.a. Les boules sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Il y a $\binom{10}{2}$ manières de choisir 2 jetons parmi 10 et il y a $\binom{7}{2}$ manières de choisir 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs. Donc

$$p(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

II.1.b. De même, 6 jetons portent des numéros impairs donc $p(B) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

II.1.c. De même, 4 jetons blancs portent des numéros impairs donc $p(A \cap B) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{2}{15}$. Ainsi, $p(A) \times p(B) = \dfrac{7}{15} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{45}$ alors que $p(A \cap B) = \dfrac{2}{15} = \dfrac{6}{45}$ donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$ donc $\boxed{\text{les évènements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}}$.

II.2.a. La variable aléatoire X peut valoir 0, 1 ou 2.

$p(X=0) = \dfrac{\binom{7}{0} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1}{15}$,

$p(X=1) = \dfrac{\binom{7}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{7}{15}$,

$p(X=2) = \dfrac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{0}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{7}{15}$. D'où :

k	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

II.2.b. $E(X) = 0 \times \dfrac{1}{15} + 1 \times \dfrac{7}{15} + 2 \times \dfrac{7}{15} = \dfrac{7}{5}$: $\boxed{E(X) = \dfrac{7}{5}}$

Exercice 4 (obligatoire)

1.a. $OM = |z|$ et $OM_1 = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ donc $OM \times OM_1 = |z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |1| = 1$.

D'autre part, $(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{OM}) = \arg(z) \quad [2\pi]$ et $(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{OM_1}) = \arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$ donc on a bien $(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{OM_1}) = -(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$.

1.b. cf. figure.

2.a. $z' = z_{M'} = \dfrac{z_M + z_{M_1}}{2} = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}$ donc on a bien $\boxed{z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)}$

2.b. $z_{B'} = \dfrac{1}{2}\left(2\mathrm{i} + \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2\mathrm{i} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$ et de même on trouve $z_{C'} = -\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.

2.c. cf. figure.

3. On a clairement les équivalences suivantes :

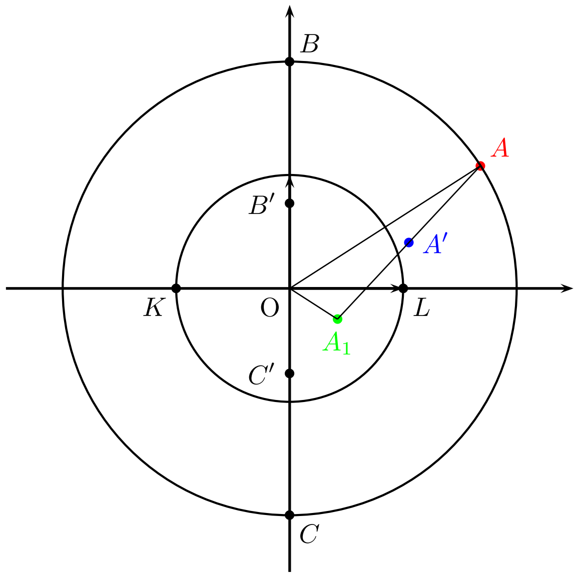
$$\begin{array}{lll} M = M' & \text{ssi} & z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ & \text{ssi} & 2z = z + \dfrac{1}{z} \\ & \text{ssi} & z = \dfrac{1}{z} \\ & \text{ssi} & z^2 = 1 \\ & \text{ssi} & z = 1 \text{ ou } z = -1 \end{array}$$

Notons (en devançant l'énoncé) K et L les points d'affixes respectives -1 et 1. Alors l'ensemble des points M tels que $M' = M$ est l'ensemble $\{K; L\}$

4. Un point M d'affixe z appartenant au cercle de centre O et de rayon 1 vérifie $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$z' = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \cos(\theta),\ \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

ce qui montre bien que M' appartient au segment $[KL]$.



$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ (spécialité)

1.a. Le couple $(x,y)=(1,1)$ est une solution particulière évidente. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation $(E') : 8(x-1)=5(y-1)$.

• Soit (x,y) une solution de (E). $5 \mid 5(y-1)$ donc $5 \mid 8(x-1)$. Or $5 \wedge 8 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, $5 \mid x-1$. Soit donc k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x-1=5k$. Alors $\boxed{x=1+5k}$. L'équation (E') donne alors $8(5k)=5(y-1)$ donc $8k=y-1$ et $\boxed{y=1+8k}$. Ainsi, si (x,y) est solution de (E), alors il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x=1+5k$ et $y=1+8k$.

• Réciproquement, s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x=1+5k$ et $y=1+8k$, alors $8x-5y=8(1+5k)-5(1+8k)=8+40k-5-40k=3$ donc (x,y) est une solution de (E).

• Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}_{(E)}=\{(1+5k\ ,\ 1+8k),\quad k\in\mathbb{Z}\}}$

1.b. $8p-5q=(m-1)-(m-4)=3$ donc $\boxed{(p,q) \text{ est une solution de } (E)}$. Par suite, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $p=1+5k$, et donc $m=8p+1=40k+9$ donc on a bien $\boxed{m\equiv 9 \pmod{40}}$

1.c. Ce nombre est bien sûr $\boxed{m_0=2009}$, pour lequel $p_0=251$ et $q_0=401$.

2.a. $2^3=8\equiv 1 \pmod 7$ donc $2^{3k}=\left(2^3\right)^k\equiv 1^k\equiv 1 \pmod 7$: $\boxed{2^{3k}\equiv 1 \pmod 7}$

2.b. Procédons à la division euclidienne de 2009 par 3 : $2009 = 669\times 3+2$ donc $2^{2009}=\left(2^3\right)^{669}\times 2^2\equiv 1\times 4\equiv 4 \pmod 7$ donc le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est $\boxed{4}$.

3.a. $10\equiv 3 \pmod 7$ donc $10^2\equiv 9\equiv 2 \pmod 7$ donc $\boxed{10^3\equiv 6\equiv -1 \pmod 7}$.

3.b. N est divisible par 7 ssi $N\equiv 0 \pmod 7$. Cette équation est équivalente à $a\times 10^3+b\equiv 0 \pmod 7$, elle-même équivalente à $-a+b\equiv 0 \pmod 7$, soit $\boxed{a\equiv b \pmod 7}$

$a=1$: la condition $b\equiv 1 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=1$ ou $b=8$. D'où $\boxed{N=1001}$ et $\boxed{N=1008}$.

$a=2$: la condition $b\equiv 2 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=2$ ou $b=9$. D'où $\boxed{N=2002}$ et $\boxed{N=2009}$.

$a=3$: la condition $b\equiv 3 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=3$. D'où $\boxed{N=3003}$.

$a=4$: la condition $b\equiv 4 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=4$. D'où $\boxed{N=4004}$.

$a=5$: la condition $b\equiv 5 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=5$. D'où $\boxed{N=5005}$.

$a=6$: la condition $b\equiv 6 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=6$. D'où $\boxed{N=6006}$.

$a=7$: la condition $b\equiv 7 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=0$ ou $b=7$. D'où $\boxed{N=7000}$ et $\boxed{N=7007}$.

$a=8$: la condition $b\equiv 8 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=1$ ou $b=8$. D'où $\boxed{N=8001}$ et $\boxed{N=8008}$.

$a=9$: la condition $b\equiv 9 \pmod 7$ avec $b\in[\![0,9]\!]$ donne $b=2$ ou $b=9$. D'où $\boxed{N=9002}$ et $\boxed{N=9009}$.