

Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2012

EXERCICE 1

6 points

Partie A : étude de fonction

1. Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, donc, par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$.

2. On a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Par opérations usuelles sur les dérivées :

$$f'(x) = 1e^{x-1} + x \times 1 \times e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

4. Pour tout réel x , $e^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :

$$y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1.$$

2. Soit $a > 0$, alors :

$$O(0; 0) \in T_a \iff 0 = (a+1)e^{a-1}(-a) + ae^{a-1} + 1$$

$$\iff 0 = e^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1$$

$$\iff 1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

3. • 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2 e^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

- Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2 e^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2 e^{x-1} = -x(2+x)e^{x-1}.$$

$x > 0$, donc $x+2 > 0$ et par ailleurs $e^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

On sait que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule en 1.

Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.

Conclusion : sur $]0; +\infty[$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.

4. La tangente cherchée est T_1 , elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$

Partie C : calcul d'aire

1. Voir annexe 1.

2. Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{x-1} \\ v(x) = x \end{cases}$, et $\begin{cases} u(x) = e^{x-1} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; 1]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0; 1]$, le théorème d'intégration par parties s'applique donc, et :

$$I = [xe^{x-1}]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx = [xe^{x-1}]_0^1 - [e^{x-1}]_0^1 = (1-0) - (1-e^{-1}) = \frac{1}{e}.$$

3. Sur $[0; 1]$ \mathcal{C} est au dessus de Δ , donc l'aire \mathcal{A} du domaine considéré est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x) - 2x) dx \\ &= \int_0^1 (xe^{x-1} + 1 - 2x) dx \\ &= I + \int_0^1 (1 - 2x) dx \quad (\text{par linéarité}) \\ &= I + [x - x^2]_0^1 \\ &= \frac{1}{e} + (1 - 1) \end{aligned}$$

Finalement : $\mathcal{A} = \frac{1}{e}$ (en unités d'aire).

EXERCICE 2**4 points**

1. Voir figure sur l'annexe 2.

2. On a :

$$\frac{b}{a} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{2+4i+i-2}{5} = i.$$

On en déduit :

- $\frac{OB}{OA} = \left| \frac{b-0}{a-0} \right| = |i| = 1$, d'où $OA = OB$;
- $(\vec{OA}; \vec{OB}) = \arg\left(\frac{b-0}{a-0}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Les deux points précédents permettent de conclure que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

3. a. L'affixe de C' est : $c' = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} = i$ (calcul fait plus haut).

b. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff z \neq b \text{ et } |z'| = 1 \\ &\iff z \neq b \text{ et } \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 1 \\ &\iff M \neq B \text{ et } \frac{AM}{BM} = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble \mathcal{E} est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

c. $C \in \mathcal{E}$ car $c' = i$, donc $|c'| = 1$.

De même $O \in \mathcal{E}$ car $OA = OB$ (le triangle OAB est isocèle en O). La médiatrice \mathcal{E} n'est donc rien d'autre que la droite (OC).

4. • La rotation r a pour écriture complexe $z' = -iz$, on en déduit que J a pour affixe $j = -ia = 2 + i$.

- La rotation r' a pour écriture complexe $z' = iz$, on en déduit que K a pour affixe $k = ic = -1 - 3i$.
- L est milieu de [KJ] donc L a pour affixe $\ell = \frac{k+j}{2} = \frac{1}{2} - i$.
- La médiane issue de O du triangle OJK est la droite (OL) et on a $\overrightarrow{OL} \left(\frac{1}{2}; -1 \right)$.
On a également $\overrightarrow{AC} (-2; -1)$, donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OL} = -2 \times \frac{1}{2} + (-1) \times (-1) = 0$. Ainsi (OL) \perp (AC), ce qui prouve que la droite (OL) est la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 3

5 points

- $u_2 = \frac{1+1}{2 \times 1} u_1 = \frac{1}{2}$
 - $u_3 = \frac{2+1}{2 \times 2} u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
 - $u_4 = \frac{3+1}{2 \times 3} u_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$
- Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$.
 - **Initialisation.** $u_1 = \frac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie au rang 1.
 - **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul on a $u_k > 0$, alors, comme $\frac{k+1}{2k} > 0$, on a $\frac{k+1}{2k} u_k > 0$, c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$, et la propriété est donc héréditaire.
 - **Conclusion.** Pour tout entier naturel n non nul : $u_n > 0$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{n+n} \leq 1$. Comme $u_n > 0$ on en déduit que $u_{n+1} \leq u_n$ et donc que la suite (u_n) est décroissante.
 - La suite (u_n) est décroissante, minorée (par 0), elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n} u_n}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} u_n = \frac{1}{2} v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 = \frac{1}{2}$.
 - Par propriété des suites géométriques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
 $v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} v_1 = \frac{1}{2^n}$, on en déduit, comme $v_n = \frac{u_n}{n}$, que $u_n = \frac{n}{2^n}$.
- On peut écrire, pour tout réel $x \in [1; +\infty[$: $f(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2 \right)$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées), donc, par opérations sur les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\ln u_n = \ln \left(\frac{n}{2^n} \right) = \ln n - \ln(2^n) = \ln n - n \ln 2 = f(n)$.
On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\infty$, puis, par application de la fonction exponentielle et de la limite d'une composée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
Remarque. On aurait pu déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) dès la question 2 c. En effet la relation $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$ entraîne que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ell = \frac{1}{2} \ell$ et donc que $\ell = 0$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $11 \times 4 - 5 \times 6 = 44 - 30 = 14$, donc le couple $(4 ; 6)$ est solution de (E).
 b. • Soit $(x ; y)$ une solution de (E), alors $11x - 5y = 14 = 11 \times 4 - 5 \times 6$, donc :

$$11(x - 4) = 5(y - 6) \quad (E')$$

5 divise $11(x - 4)$ et $\text{PGCD}(5, 11) = 1$, donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x - 4$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - 4 = 5k$. En remplaçant dans (E') $x - 4$ par $5k$ on a alors, après simplification par 5 : $11k = y - 6$, ce qui donne finalement $(x ; y) = (4 + 5k ; 6 + 11k)$.

- Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ les couples $(4 + 5k ; 6 + 11k)$ sont solutions de (E) car :

$$11(4 + 5k) - 5(6 + 11k) = 44 + 55k - 30 - 55k = 14.$$

- Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $\{(4 + 5k ; 6 + 11k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$.

2. a. $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} : (2^3)^n \equiv 1^n \pmod{7}$, c'est-à-dire : $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$.
 b. $2011 = 287 \times 7 + 2$, donc $2011 \equiv 2 \pmod{7}$, par conséquent : $2011^{2012} \equiv 2^{2012} \pmod{7}$. Par ailleurs $2012 = 3 \times 670 + 2$, donc :

$$\begin{aligned} 2011^{2012} &\equiv 2^{2012} \pmod{7} \\ &\equiv 2^{3 \times 670 + 2} \pmod{7} \\ &\equiv 2^{3 \times 670} \times 2^2 \pmod{7} \\ &\equiv 1 \times 4 \pmod{7} \\ &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}$$

et comme $0 \leq 4 < 7$, on peut conclure que le reste dans la division euclidienne de 2011^{2012} par 7 est égal à 4.

3. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{3}{2}(1 - i) \in \mathbb{C}^*$ et $b = 4 - 2i \in \mathbb{C}$. Il s'agit donc d'une similitude directe. Notons k son rapport, α son angle et Ω d'affixe ω son centre. Alors :

- $k = |a| = \left| \frac{3}{2}(1 - i) \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;
- $\alpha = \arg(a) = \arg\left(\frac{3}{2}\right) + \arg(1 - i) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$;
- ω est donné par :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{b}{1 - a} \\ &= \frac{4 - 2i}{1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i} \\ &= \frac{4 - 2i}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i} \\ &= \frac{8 - 4i}{-1 + 3i} \\ &= \frac{(8 - 4i)(-1 - 3i)}{(-1)^2 + (-3)^2} \\ &= \frac{-8 - 24i + 4i - 12}{10} \\ &= -2 - 2i. \end{aligned}$$

4. Avec $A = 12$, la boucle « tant que » de l'algorithme est répétée 3 fois (car $\sqrt{12} \approx 3,4$) :

N	A/N	Ent(A/N)	$A/N - \text{Ent}(A/N) \stackrel{?}{=} 0$	Affichage	
1	12	12	oui	N=1	A/N=12
2	6	6	oui	N=2	A/N=6
3	4	4	oui	N=3	A/N=4

Le test « si $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$ » sert en fait à détecter si la division de A par N « tombe juste », c'est-à-dire si N divise A. Si c'est le cas on affiche N et $\frac{A}{N}$ qui sont alors tous deux des diviseurs de A avec $N \leq \sqrt{A}$ et $\frac{A}{N} \geq \sqrt{A}$.

Au final cet algorithme permet donc d'afficher **tous les diviseurs de A**.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

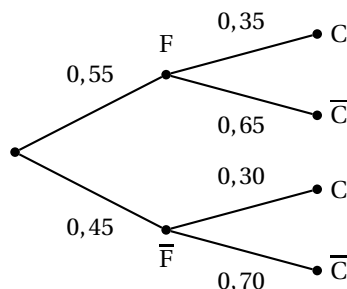
1. Notons :

- F l'évènement « l'élève choisi est une fille » ;
- C l'évènement « l'élève choisi déjeune à la cantine ».

D'après l'énoncé :

$$p(F) = 0,55 \quad p_F(C) = 0,35 \quad p_{\bar{F}}(C) = 0,30.$$

On peut dresser l'arbre suivant :



On a alors :

$$p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - (0,55 \times 0,35 + 0,45 \times 0,30) = 0,6725.$$

2. Il s'agit de tirages simultanés, le nombre total de tirages de 3 jetons parmi 10 est donc de $\binom{10}{3} = 120$. Parmi ces 120 tirages, il y a $\binom{5}{3} = 10$ tirages où les trois numéros sont impairs. Le nombre de tirages avec au moins un jeton à numéro pair est donc égal à $120 - 10 = 110$.
3. Y suit la loi $\mathcal{B}\left(20, \frac{1}{5}\right)$, donc :

$$\begin{aligned} p(Y \geq 2) &= 1 - p(\overline{Y < 2}) \\ &= 1 - [p(Y = 0) + p(Y = 1)] \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{20} + \binom{20}{1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^{19} \right] \\ &= 1 - \left[\frac{4^{20} + 20 \times 4^{19}}{5^{20}} \right] \\ &\approx 0,931 \text{ à } 10^{-3} \text{ près} \end{aligned}$$

4. L'évènement « l'appareil présente au moins l'un des deux défauts » est l'évènement $A \cup F$.

On a : $p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F)$, et comme A et F sont indépendants, cela donne : $p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A)p(F)$ d'où l'équation :

$$\begin{aligned} 0,069 = 0,02 + p(F) - 0,02p(F) &\iff 0,049 = 0,98p(F) \\ &\iff p(F) = \frac{0,049}{0,98} \\ &\iff p(F) = 0,05. \end{aligned}$$

5. L'algorithme affiche le nombre de fois où le tirage aléatoire d'un numéro entre 1 et 7 donne un résultat strictement supérieur à 5 lors de 9 tirages. On peut assimiler ces 9 tirages indépendants à un schéma de Bernoulli où l'évènement « succès » est « le numéro obtenu est strictement supérieur à 5 », alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = \frac{2}{7}$ (probabilité qu'un nombre entier entre 1 et 7 soit strictement supérieur à 5).

ANNEXE 1
Exercice 1