Amérique du Nord - BAC S 2013

Éléments de correction

* * *

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2,-5,-3)$ ne sont pas colinéaires.
2. (a) $\vec{u}(2,-1,3)$

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 2+1-3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u}.\overrightarrow{AC} = 4+5-9 = 0$$

$\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaries de (ABC), il définit ainsi un vecteur normal à ce plan.

(b) $(ABC) : 2x - y + 3z + d = 0$ et $A \in (ABC)$ donne $d = 1$ et on a l'équation du plan :

$$(ABC) : 2x - y + 3z + 1 = 0$$

(c) $\Delta : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}.$

(d) $H \in \Delta$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{ \begin{array}{rcl} x_H &=& 2t+7 \\ y_H &=& -t-1 \\ z_H &=& 3t+4 \end{array} \right.$

De plus, $H \in (ABC)$ donc :

$$2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0$$

ce qui donne : $4t + 14 + t + 1 + 9t + 12 + 1 = 0$ c'est-à-dire $t = -2$. Finalement :

$$H(3,1,-2)$$

3. (a) On considère $\vec{n}_1(1,1,1)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$ et $\vec{n}_2(1,4,0)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x+4y+2 &=& 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -4y-2+y+z &=& 0 \\ x = -4y-2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& 3y+2 \\ x &=& -4y-2 \end{array} \right.$

En posant $y = t$ comme paramètre :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3t+2 \\ y &=& t \\ z &=& -4t-2 \end{array} \right.$$

(c) On cherche une éventuelle intersection entre d et (ABC). $d \cap (ABC) \neq \emptyset$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $2(-4t-2) - t + 3(3t+2) + 1 = 0$. Or cette équation est équivalente à $3 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $d \mathbin{/\!/} (ABC)$.

Exercice 2

1. (a) L'algorithme renvoie $1,8340$.

(b) Il permet de calculer u_n en choisissant la valeur de n.

(c) (u_n) semble croissante et convergente.

2. (a) Montrons par récurrence que $0 < u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On définit $P(n)$ la propriété "$0 < u_n \leq 2$".

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$ et $P(0)$ vraie.
Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n. Alors par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & 0 < u_n \leq 2 \\ \Longrightarrow\quad & 0 < 2u_n \leq 4 \\ \Longrightarrow\quad & 0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4} \quad \text{la fonction racine carrée étant croissante} \\ \Longrightarrow\quad & 0 < u_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

(b) On sait que la suite (u_n) est à termes strictement positifs, on peut alors étudier le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}$$

De plus $u_n \leq 2$ donc $\dfrac{2}{u_n} \geq 1$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. La suite est donc croissante.

(c) La suite est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

3. (a) Tout d'abord, $v_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$. Ensuite :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln 2 \\ &= \ln(\sqrt{2u_n}) - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(2u_n) - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

(b) $v_n = v_0 \times q^n = -\ln 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$\ln u_n = v_n + \ln 2$ donc $u_n = e^{v_n + \ln 2} = e^{(1-\frac{1}{2^n})\ln 2}$, finalement : $u_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(d)

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	TANT QUE $u \leq 1,999$
	u prend la valeur $\sqrt{2u}$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher n

Exercice 3

Partie A.

1. 0,637
2. $p = \mathbb{P}(X \geq 385) = 0,5 + \mathbb{P}(385 \leq X \leq 400) \simeq 0,914$.
3. Soit X suivant une loi $\mathcal{N}(400, \sigma^2)$ telle que $\mathbb{P}(X \geq 385)$, alors :

$$\mathbb{P}(X \geq 385) = \mathbb{P}\left(\frac{X-400}{\sigma} \geq \frac{385-400}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{-15}{\sigma}\right)$$

où Z suit $\mathcal{N}(0,1)$. On cherche ainsi σ tel que : $\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-15}{\sigma}\right) \simeq 0,040$, on en déduit que :

$$-\frac{15}{\sigma} \simeq -1,751 \qquad \text{et finalement :} \quad \sigma \simeq 8,567$$

Partie B.

1. $p = 0,96$ et $n = 300$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donné par :

$$\left[0,96 - 1,96\frac{\sqrt{0,96(1-0,96)}}{\sqrt{300}} \;\; ; \;\; 0,96 + 1,96\frac{\sqrt{0,96(1-0,96)}}{\sqrt{300}}\right]$$

Ce qui donne :

$$[0,938 \;\; ; \;\; 0,982]$$

2. Pour l'échantillon, la fréquence observée est $f = \frac{283}{300} \simeq 0,943$ qui appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique. En considérant cet échantillon, l'objectif est atteint.

Partie C.

1. $\mathbb{P}(T \geq 30) = 1 - \mathbb{P}(0 \leq T \leq 30) = 1 - \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-30\lambda}$. On doit donc résoudre :

$$e^{-30\lambda} = 0,913$$

On a donc : $\lambda = \frac{\ln(0,913)}{-30} \simeq 0,003$.

2. On utilise la propriété de la loi exponentielle (durée de vie sans vieillissement) :

$$\mathbb{P}_{(T\geq 60)}(T \geq 90) = \mathbb{P}_{(T\geq 60)}(T \geq 60+30) = \mathbb{P}(T \geq 30) = 0,913$$

3. On résout $\mathbb{P}(T \geq x) = 0,5$:

$$\mathbb{P}(T \geq x) = e^{-0,003x} = 0,5 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\ln(0,5)}{-0,003} \simeq 231\text{jours}$$

Exercice 4

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$, par produit :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   (c) L'axe des ordonnées est une asymptote verticale et l'axe des abscisses, une asyptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2. (a) f dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x(1+\ln x)}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln x)}{x^4} = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

   (b) $-1-2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < -1/2 \Leftrightarrow x < e^{-1/2}$ donc $f'(x) > 0$ sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$.

   (c) On en déduit le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

3. (a) On doit résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\frac{1+\ln x}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1+\ln x = 0 \Longleftrightarrow x = e^{-1}$$

   L'unique point d'intersection est $\left(\dfrac{1}{e}\ ,\ 0\right)$.

   (b) $f(x) \leq 0$ pour $x \in]0\ ,\ 1/e]$ et $f(x) \geq 0$ pour $x \in [1/e\ ,\ +\infty[$.

4. (a) $f(x) \leq e/2$ pour tout $x \in [1/e\ ,\ 2]$ donc par positivité de l'intégrale :

$$I_2 = \int_{1/e}^{2} f(x)dx \leq (2-\frac{1}{e})\times\frac{e}{2} \leq e - \frac{1}{2}$$

(b) $I_n = \int_{1/e}^{n} f(x)dx = \left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_{1/e}^{n} = \frac{-2-\ln n}{n} + e.$

(c) $\lim_{n\to+\infty} I_n = e.$