# Correction du Baccalauréat S
# Pondichéry
# Avril 2013

**Exercice 1.** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

### Partie 1

La fonction $h$ est définie par $h(t) = \dfrac{a}{1+b\mathrm{e}^{-0,04t}}$ avec $a$ et $b$ constantes réelles positives.

- D'après les données, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$.
  On a $\lim\limits_{t\to+\infty} b\mathrm{e}^{-0,04t} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = a = 2}$.
- De plus $h(0) = 0,1$.
  Or $h(0) = \dfrac{a}{1+b}$ soit $0,1 = \dfrac{2}{1+b}$ d'où $\boxed{b = 19}$.

On obtient donc $\boxed{h(t) = \dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}}}$.

### Partie 2

1. $\boxed{f'(t) = \dfrac{1,52\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2}}$.

   La dérivée de $f$ est donc strictement positive sur $[0\,;250]$ et donc $f$ est strictement croissante sur cet intervalle.

2. On cherche alors à résoudre l'inéquation $f(t) > 1,5$ soit $\dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}} > 1,5$.
   On obtient $0,5 > 28,5\mathrm{e}^{-0,04t} \iff \dfrac{1}{57} > \mathrm{e}^{-0,04t}$.
   La fonction ln étant strictement croissante sur $[0\,;250]$ on a donc :
   $\ln\left(\dfrac{1}{57}\right) > \ln\left(\mathrm{e}^{-0,04t}\right) \iff -\ln 57 > -0,04t \iff \boxed{t > \dfrac{\ln(57)}{0,04} = 25\ln(57) \simeq 101,08}$

3. **a.** On a $f(t) = \dfrac{2\times\mathrm{e}^{0,04t}}{\left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)\times\mathrm{e}^{0,04t}}$ soit $\boxed{f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}}$.

   La fonction F définie sur $[0\,;250]$ par $F(t) = 50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t}+19\right)$ est bien une primitive de la fonction $f$ car sa dérivée $F'$ est égale a $f$.
   $F'(t) = \dfrac{50\times 0,04\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19} = \dfrac{2\times\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19} = f(t)$.

   **b.** La valeur moyenne de $f$ sur $[50\,;100]$ est donnée par : $m = \frac{1}{50}\int_{50}^{100} f(t)dt$.
   $\frac{1}{50}\int_{50}^{100} f(t)dt = \frac{1}{50}[F(t)]_{50}^{100} = \frac{1}{50}(F(100)-F(50)) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^4+19}{\mathrm{e}^2+19}\right)$
   $\boxed{m = \dfrac{1}{50}\displaystyle\int_{50}^{100} f(t)dt = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^4+19}{\mathrm{e}^2+19}\right) \approx 1,03}$ à $10^{-2}$ près.

   Cela correspond à la taille moyenne du plant de maïs entre le 50ème et le 100ème jour.

4. Le nombre dérivé $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a$.
   On cherche donc graphiquement le point de la courbe qui a une tangente de coefficient directeur maximal.
   Une valeur approchée de $a$ est alors 73, la hauteur du plant est donc de $f(73) \approx 0,99$ m à $10^{-2}$ près.

## Exercice 2. QCM **4 points**

**Commun à tous les candidats**

1. **Réponse b)**
Le point B(0 ;1 ;-1) appartient à (P), ce qui élimine les choix c) et d), et a) est l'équation d'une droite.
2. **Réponse c )**
En remplaçant les coordonnées d'un point de (D) dans l'équation de (P) on obtient :
$\forall t \in \mathbb{R} (-2+t) - 2(-t) + 3(-1-t) + 5 = 0$. Donc tout point de (D) est dans (P).
3. **Réponse a)**
$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (D).
4. **Réponse b)**
Le plan (S) est caractérisé par le point C(-2 ;0 ;-1) et par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

## Exercice 3. **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. On prend $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   - **a.** La forme algébrique de $Z_M$ est $\boxed{Z_M = 1 - i\sqrt{3}}$.
   - **b.** $Z_{M'} = -iZ_M = -i\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ soit $\boxed{Z_{M'} = -\sqrt{3} - i}$. Alors $\boxed{|Z_{M'}| = 2}$ et $\boxed{\arg Z_{M'} = -\dfrac{5\pi}{6} \bmod 2\pi}$.
   - **c.** Vérification graphique évidente dans $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
2. On prend $Z_M = x + iy$.
   - **a.** Le point I est le milieu du segment [AM] donc $I\left(\frac{Z_A+Z_M}{2}\right)$ soit $\boxed{I\left(\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y}{2}i\right)}$.
   - **b.** $Z_{M'} = -iZ_M$ donc $\boxed{Z_{M'}\left(y - xi\right)}$
   - **c.** $\boxed{I\left(\dfrac{x+1}{2}; \dfrac{y}{2}\right)}$, $\boxed{B\,(0;1)}$ et $\boxed{M'\left(y;-x\right)}$.
   - **d.** Montrons que (OI) est une hauteur de OBM'.
     - Le produit scalaire $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} \\ \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} . \overrightarrow{BM'}\begin{pmatrix} y \\ \\ -x-1 \end{pmatrix} = 0$ donc la droite (OI) est perpendiculaire à (BM').
     - La droite (OI) est donc une hauteur de OBM'
   - **e.** $OI^2 = \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ et $BM'^2 = y^2 + (x+1)^2$ donc $BM'^2 = 4OI^2$ soit $\boxed{BM' = 2OI}$.

**Exercice 3.** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. **a.** On a $A\times U_n=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}j_n\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,125j_n+0,525a_n\\ 0,625j_n+0,625a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j_{n+1}\\ a_{n+1}\end{pmatrix}$ soit : $\boxed{A\times U_n=U_{n+1}}$.

   **b.** $U_1=A\times U_0=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}200\\ 500\end{pmatrix}$ donc $\boxed{U_1\approx\begin{pmatrix}287\\ 437\end{pmatrix}}$.

   De même :

   $U_2=A\times U_1=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}287\\ 437\end{pmatrix}$ donc $\boxed{U_2\approx\begin{pmatrix}265\\ 452\end{pmatrix}}$.

   **c.** On obtient facilement (récurrence immédiate) : $\boxed{U_n=A\times U_{n-1}=A^nU_0}$.

2. **a.** On a :

   $Q\times D=\begin{pmatrix}-1,75 & 3\\ 1,25 & 5\end{pmatrix}$ et donc $Q\times D\times Q^{-1}=\begin{pmatrix}-1,75 & 3\\ 1,25 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-0,25 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}=A.$

   On a bien montré que : $\boxed{Q\times D\times Q^{-1}=A}$.

   **b.** Montrons par récurrence que : $Q\times D^n\times Q^{-1}=A^n$.

   – **Initialisation** pour $n=1$ : $A=Q\times D\times Q^{-1}$ d'après la question 2°a).
   – **Hérédité** : Supposons que pour $n$ fixé, $A^n=Q\times D^n\times Q^{-1}$, alors :

   $$\begin{aligned}A^{n+1}&=A\times A^{n+1}=A\times\left(Q\times D^n\times Q^{-1}\right)\\ A^{n+1}&=Q\times D\times\underbrace{Q^{-1}\times Q}\times D^n\times Q^{-1}\\ A^{n+1}&=Q\times D\times\quad Id\quad\times D^n\times Q^{-1}\\ A^{n+1}&=Q\times D^{n+1}\times Q^{-1}\end{aligned}$$

   – **Conclusion** : On a donc prouvé que pour tous les entiers $n$ : $\boxed{A^n=Q\times D^n\times Q^{-1}}$.

   **c.** La matrice $D$ étant diagonale on a : $\boxed{D^n=\begin{pmatrix}(-0,25)^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

3. **a.** On a montré que $U_n=A^nU_0$, et donc :

   $$U_n=\begin{pmatrix}j_n\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n\\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}200\\ 500\end{pmatrix}$$

   Et donc

   $$\boxed{U_n=\begin{pmatrix}j_n=270-70\times(-0,25)^n\\ a_n=450+50\times(-0,25)^n\end{pmatrix}}$$

   On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,25)^n=0$ et de ce fait :

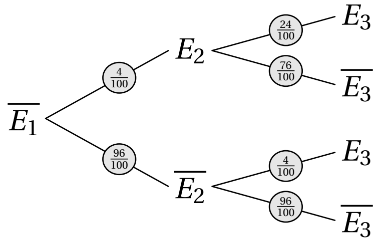
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}j_n\\ a_n\end{pmatrix}=\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}270-70\times(-0,25)^n\\ 450+50\times(-0,25)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}270\\ 450\end{pmatrix}}.$$

   **b.** La population va tendre à se stabiliser vers 270 jeunes et 450 adultes.

**Exercice 4.** **6 points**

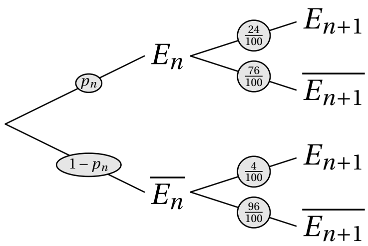
**Commun à tous les candidats**

1. **a.** On a en utilisant l'arbre, $p_3 = \frac{24}{10} \times \frac{4}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{96}{100}$ soit $\boxed{p_3 = \dfrac{480}{10000} = \dfrac{4,8}{100}}$.




   **b.** $P_{E_3}(E_2) = \dfrac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \dfrac{\frac{4}{100} \times \frac{24}{100}}{p_3}$ donc $\boxed{P_{E_3}(E_2) = \dfrac{96}{480} = 0,2}$.

2. **a.** Arbre de probabilité.




   **b.** En utilisant l'arbre précédent on a , pour $n$ entier $n \geq 1$ :
   $p_{n+1} = P(E_{n+1} \cap E_n) + P\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right)$
   $p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n)$
   $\boxed{p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04}$.

   **c.** Pour $n$ entier $n \geq 1$ :
   $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05$
   $u_{n+1} = 0,2p_n + 0,04 - 0,05$
   $u_{n+1} = 0,2p_n - 0,01$
   $u_{n+1} = 0,2(p_n - 0,05)$
   Et donc $u_{n+1} = 0,2u_n$ ce qui prouve que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = p_0 - 0,05 = -0,05$.
   Alors $u_n = -0,05(0,2)^n$
   et donc $p_n = u_n + 0,05 = -0,05(0,2)^n + 0,05$
   $\boxed{p_n = 0,05\left(1 - (0,2)^n\right)}$.

   **d.** $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05}$.

   **e.** Pour K fixé, J est le rang du terme de la suite tel que $P_J < 0,05 - 10^K$. La suite était croissante et convergente vers 0,05, on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $\left[0,05 - 10^K ; 0,05\right]$ et donc l'algorithme s'arrête.

3. **a.** L'expérience consistant à tester un salarié et à appeler succès le fait qu'il soit malade une semaine donnée, est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,05$.
   Lorsqu'on teste au hasard les 220 employés, on répète la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante. X présentant le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, X suit un loi Binomiale de paramètre $p = 0,05$ et $n = 220$.
   On a donc : $\boxed{\mu = \mathrm{E}(X) = np = 11}$ et $\boxed{\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10,45}}$.

**b.** On cherche à calculer $P(7 \leq X \leq 15)$.

$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\dfrac{7-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{15-\mu}{\sigma}\right)$

$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\dfrac{7-11}{\sqrt{10,45}} \leq Z \leq \dfrac{15-11}{\sqrt{10,45}}\right)$

$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\dfrac{-4}{\sqrt{10,45}} \leq Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right)$

Or Z suit la loi normale centrée réduite et donc puisque $\dfrac{4}{\sqrt{10,45}} \approx 1,237$ on a en utilisant le tableau donné :

$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{-4}{\sqrt{10,45}}\right)$

$P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,892 - 0,108$

$\boxed{P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,784}$

**Remarque** :

On peut aussi utiliser les propriétés de la gaussienne et écrire :

$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{-4}{\sqrt{10,45}}\right)$

$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right)\right)$

$P(7 \leq X \leq 15) = 2 \times P\left(Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - 1$

$P(7 \leq X \leq 15) \approx 2 \times 0,892 - 1$

$\boxed{P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,784}$