Arithmétique : exercices en terminale S spécialité série 2

La série 2 des exercices d'arithmétiques en terminale S pour les élèves suivants l'enseignement de spécialité.Vous trouverez les différentes propriétés du cours à appliquer ainsi que le théorème de Gauss et le théorème de Bezout.

Problème sur l'arithmétique

Exercice 1 :

Soit n un entier relatif et
$a = 5n^3 + n$

. Montrer que a est divisible par 3.

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel
Montrer que
$3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

Exercice 3 :

Soit p un nombre entier naturel impair. Montrer que la somme de p entiers naturels consécutifs est un multiple de p.

Exercice 4 :

Indice : Théorème de Bézout
Soit x un réel. Montrer que si
x^7

et
x^{12}

sont des nombres rationnels, alors x l'est également.

Exercice 5 :

Indice: Lemme de Gauss
Résoudre dans N* l'équation :
$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$$

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel
Montrer que quelque soit n, la fraction
$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

est toujours irréductible.

Exercice 7 :Nombres de Mersenne

Soit n un entier naturel non nul.
On considère les nombre de la forme :
$M_n = 2^n - 1$

dits nombres de Mersenne.
1. Montrer que
M_2, M_3, M_5, M_7

sont des nombres premiers.
2. Montrer que si p est un diviseur de n, alors
M_n

est divisible par
$2^p - 1$

.
En déduire que si
M_n

est un nombre premier alors n l'est également.
3. Etudier la réciproque.

Exercice 8 :

Trouver tous les couples (a,b) d'entiers naturels vérifiants : ppcm(a,b) = 40 et a+b=60

Exercice 9 :

Soit a et b deux entiers naturels.
Montrer que si pgcd(a,b) = 1 alors pgcd(a,b^2) = 1

Exercice 10 :

Soit n un entier naturel impair,
Montrer que parmi $(n-1)^2+1$ entiers, il en existe n dont la somme est un multiple de n.

Exercice 11 :

Soit n un entier naturel
1. Démontrer que n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par (n+1)
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2+15n+19$ est divisible par n+1
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2

Exercice 12 : Nombres de Fermat .

Soit n un entier naturel .
a. Montrer que si
2^n+1

est premier, alors n est une puissance de 2
b. On pose
$Fn = 2^{2^n}+1$

(nombres de Fermat). Montrer que les
F_n

sont deux à deux premiers entre eux.

Corrigé de cet exercice

Divisibilité et multiples

1. Démontrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisble par 11.
2. Donner le reste de la division euclidienne de $17^n + 18^n + 19^n$ par 4.
3. Démontrer que :
   (a) n n'est pas un multiple de 5 $\Longleftrightarrow n^4 - 1$ est un multiple de 5
   (b) En déduire : $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow n^{p+4}$ et n^p ont le même chiffre des unités.

Corrigé de cet exercice

Reste de division Euclidienne

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
3. Á l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
4. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 pour n quelconque ?
5. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

Corrigé de cet exercice

Extrait du baccalauréat S en spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation

$$(E): \quad 8x - 5y = 3$$

b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p,\ q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple $(p,\ q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \quad (\text{modulo } 40)$.

c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. Soit n un nombre entier naturel.

a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 (\text{modulo } 7)$.
Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que $10^3 \equiv -1 (\text{modulo } 7)$.

b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Corrigé de cet exercice

Si cela n'a pas été effectué, vous pouvez résoudre **la** série 1 des exercices sur l'arithmétique **en enseignement de spécialité pour les élèves de terminale S.**